

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ESSAI
SUR LA
FORME GÉNÉRALE
DES
THÉORIES PHYSIQUES

THÈSE PRINCIPALE
POUR LE DOCTORAT ÈS LETTRES (PHILOSOPHIE)

PRÉSENTÉE PAR

JEAN-LOUIS DESTOUCHES
DOCTEUR ÈS SCIENCES
CHARGÉ DE RECHERCHES

CLUJ—ROMANIA
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE « ARDEALUL »
STR. MEMORANDULUI 22
1938

ESSAI SUR LA FORME GÉNÉRALE
DES THÉORIES PHYSIQUES



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553032_0041

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

ESSAI
SUR LA
FORME GÉNÉRALE
DES
THÉORIES PHYSIQUES

THÈSE PRINCIPALE
POUR LE DOCTORAT ÈS LETTRES (PHILOSOPHIE)

PRÉSENTÉE PAR

JEAN-LOUIS DESTOUCHES

DOCTEUR ÈS SCIENCES
CHARGÉ DE RECHERCHES

CLUJ—ROMANIA
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE « ARDEALUL »
STR. MEMORANDULUI 22
1938

La Faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les Thèses ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.



ESSAI SUR LA FORME GÉNÉRALE DES THÉORIES PHYSIQUES

INTRODUCTION

Notre but dans ce travail a été de dégager certaines notions générales concernant la forme des théories physiques nouvelles. Les idées que nous défendons sont souvent fort éloignées de celles que soutiennent les philosophes et physiciens classiques mais cependant à la réflexion il nous semble qu'elles doivent paraître vraisemblables et naturelles.

Les notions essentielles que nous rencontrerons au cours de cette étude sont en premier lieu qu'il existe une physique nouvelle dont les théories sont construites sur des conceptions bien différentes des théories classiques qui ont vu tous leurs principes intangibles être successivement battus en brèche: la science classique est prédicative, univoque, rationnelle, à tendances réalistes; ces caractères ne peuvent plus être possédés par la science nouvelle: pour toute vérité d'ordre scientifique le plus que nous puissions faire est de délimiter un certain champ d'éventualités où nous nous sentirons en droit d'admettre qu'elle ne sera pas démentie, et les règles de raisonnement elles-mêmes doivent être comprises dans ces vérifiés. Ainsi la construction doit être faite sachant d'avance que l'on a et que l'on ne peut avoir aucune base définitive. Toute connaissance est non-prédicative, non-univoque, non-rationnelle, incomplète, imparfaite, approchée, sommaire, schématique, simplificatrice, abstraite, simple, même jusque dans les notions les plus primitives. La certitude pratique remplace partout la certitude absolue, même dans les lois de la déduction, et la réalité n'est pas préformée: nous la construisons en partie progressivement en nous servant des notions schématiques déjà dégagées. De plus si aucune connaissance n'est prédicative le domaine d'application d'un concept ne peut jamais être définitivement clos, le sens de celui-ci ne peut jamais être définitivement fixé, il demeure toujours ouvert et en devenir, suspendu entre un concret dont il est issu et tourné vers un abstrait toujours en formation. Si l'abstraction joue un rôle si fondamental il nous faut une méthode pour y parvenir: il en existe une et une seule, c'est la mé-

thode axiomatique: à partir de certaines apparences nous formons des concepts que nous essayons de relier entre-eux; c'est par ces liaisons qu'apparaît la forme théorique, liaisons qui progressivement se sont dégagées sous forme de lois de raisonnement. Lorsqu'on a atteint le stade dans lequel on a dégagé certaines règles de raisonnement, certaines règles de définition, certaines notions schématisées suffisantes pour retrouver par les règles du raisonnement, toutes les notions et les lois dont on aura besoin, la schématisation a pris la forme d'une théorie déductive.

La nécessité se fait sentir d'étudier alors certains caractères généraux des théories deductives: ceci nous occupe pendant un bon nombre de pages. Le but poursuivi par la méthode déductive est de remplacer des discussions dans chaque cas particulier par des règles générales énoncées au début de la théorie, règles de définition et de justification. Ces règles permettent d'introduire le maximum d'enchaînements pour que le schéma soit adéquat: la connaissance des têtes de chaînes permet alors de connaître toute la chaîne en utilisant les règles.

Ces règles ne peuvent être définitives et générales, seule une bonne adéquation décide de leur choix; aussi en dehors des règles classiques valables dans un grand nombre de cas rencontre-t-on la nécessité de faire choix d'autres règles. Ces principes sont évidemment fort éloignés de ceux qu'admettent les classiques, cependant c'est un fait que la logique classique ne suffit plus, nous avons besoin de plusieurs logiques. Nous avons indiqué les grandes lignes d'une logique qui se trouve particulièrement opportune, car à partir d'elle on peut en construire qui ont une très grande utilité en physique nouvelle.

Comme conditions à imposer aux théories deductives nous n'en trouvons qu'une d'essentielle: la consistance; une autre se montre importante aussi, c'est celle d'indépendance. La nécessité de la condition de consistance est établie par le fait qu'elle est indispensable à une bonne adéquation. D'autre part nous voyons déjà s'introduire la notion de groupe par les groupes d'équivalence d'une théorie déductive, notion qui joue en physique un rôle fondamental.

L'étude des théories deductives terminée, nous devons envisager si une théorie physique doit consister uniquement en une théorie déductive ou si seulement une partie se met sous cette forme. Une théorie déductive part de termes primitifs ou concepts et d'axiomes ou postulats. Or ceux-ci ne sont pas immédiats, mais

sont le terme d'une schématisation. On ne peut donc pas commencer par l'énoncé axiomatique, une partie préliminaire est nécessaire. Celle-ci, comme nous le verrons dans la dernière partie de ce travail, qui a pour but de permettre au lecteur de saisir intuitivement l'idée générale de la théorie considérée ainsi que la signification des concepts et le caractère naturel des postulats, ne peut être exprimée totalement en formules comme le sont les deux autres parties d'une théorie physique: énoncé axiomatique et partie déductive. Cette première partie est hétérogène, comprenant des morceaux de théories deductives, des comparaisons avec des théories antérieures, des explications plus ou moins formalisées faisant appel à l'intuition. Son unité ne vient que du but à atteindre: faire accepter une théorie. A notre avis c'est la partie essentielle d'une théorie physique. A cette partie dont les raisonnements sont toujours aventurés, nous avons donné le nom de „synthèse inductive“.

Il y a donc trois parties dans une théorie physique: la synthèse inductive, l'énoncé axiomatique, la partie déductive. L'énoncé axiomatique est la frontière entre les deux autres parties, ce qui lui impose des conditions spéciales: la première lui impose l'indépendance des éléments primitifs, l'autre la consistance.

Enfin il y a un dernier élément qui joue un grand rôle dans une théorie physique, c'est l'élément esthétique.

En somme, dans cette étude sur la forme des théories physiques, deux parties apparaissent: d'abord importance des théories deductives qui sont étudiées assez en détail, puis nécessité de préliminaires dont l'étude de la forme conduit à la synthèse inductive.

Ce que nous constatons c'est un abandon total de notions déterminées et fixées, de réalité préformée, de propriété en soi, d'abstrait autonome, de règles absolues, d'objectivité totale, pour leur substituer des notions dont le sens demeure en devenir, une réalité construite mentalement en grande partie, des propriétés relatives à un mode de schématisation, d'abstrait construit d'une façon adéquate à partir du concret, de règles adéquates non éternelles, d'objectivité liée à des éléments subjectifs.

Partout nous faisons appel à des notions subjectives, toute objectivité est relative à d'autres éléments pris comme subjectifs.

Une théorie physique ne sera pas indépendante de nous, expliquant un monde où nous sommes étrangers, mais sera fortement empreinte de nous, de nos actions, et relative à un monde auquel nous appartenons.

Nous espérons que cet aperçu préliminaire des vues que nous développons facilitera la lecture de notre ouvrage.

CHAPITRE I.

PHYSIQUE NOUVELLE ET PHYSIQUE CLASSIQUE.

1. *Existence d'une physique nouvelle.* — Cet essai pose une question préliminaire: Existe-t-il réellement une physique nouvelle ou bien cette soi-disant physique nouvelle n'est elle que le développement de la physique classique qui s'est étendue à de nouveaux domaines? C'est à cette question que nous devons d'abord répondre, en montrant qu'il existe bien une physique nouvelle essentiellement différente de la physique classique.

En premier lieu il nous faut caractériser cette dernière. La définition qui nous semble la plus simple se borne à constater que la physique classique est celle dont s'occupent les traités dits classiques de Physique, ayant pour parties principales la Mécanique physique, la Chaleur et la Thermodynamique, l'Optique, l'Électricité, l'Acoustique. Son objet est l'étude des phénomènes à notre échelle, qu'on peut atteindre, tout au moins grossièrement, par les sens, les appareils ne faisant que transformer en expériences quantitatives précises des notions qui sans eux demeureraient vagues et qualitatives.

Les conceptions de cette physique classique⁽¹⁾ sont directement liées à son objet et à ses méthodes expérimentales; un physicien classique est d'instinct un réaliste, aussi les théories classiques sont-elles empreintes de cet esprit. Elles ont, en effet, pour caractères essentiels de supposer l'existence d'un temps réellement continu, d'un espace physique absolu euclidien, d'une mécanique unique: la mécanique newtonienne; par suite la continuité s'introduit partout, les propriétés physiques sont attribuées comme des propriétés intrinsèques aux objets qui sont éternels, les propagations d'ondes sont dues à des vibrations effectives d'un

(1) Voir: ABEL REY. *La Théorie de la Physique chez les physiciens contemporains*, 2^e éd. (Alcan Paris 1923).

certain milieu et ont donc un caractère de réalité concrète. Enfin la physique classique est déterministe et totalement objective.

Ces caractères essentiels de la physique classique étant rappelés, examinons ceux de la physique nouvelle. D'abord son objet a changé: elle ne se borne plus aux phénomènes à l'échelle humaine: elle pousse ses investigations dans le très grand (étude des étoiles et des nébuleuses) et dans le très petit (étude du monde atomique). La technique expérimentale de la physique nouvelle est par suite très différente de celle de la physique classique. Il est nécessaire qu'un appareil de mesure soit interposé pour observer des phénomènes à ces échelles extrêmes; on n'a donc aucun contact direct avec la réalité expérimentale et, en outre, on rencontre des difficultés d'expérimentation inconnues auparavant qui limitent étrangement nos possibilités d'information.

Ces indications nous montrent qu'un domaine nouveau est venu s'adjoindre à celui de la physique classique, mais on pourrait penser qu'il y a seulement un prolongement de la physique classique à effectuer. Or on constate que la physique classique, en vertu de sa continuité et de son objectivité, fournit pour ces domaines des descriptions complètes, pleinement satisfaisantes pour l'esprit; malheureusement il advient que ces descriptions sont en opposition totale avec les résultats expérimentaux. Nous allons voir en effet s'effondrer tous les caractères absolus de la physique classique.

2. *L'effondrement de la conception classique.* Depuis le début de ce siècle tous les caractères fondamentaux de la physique classique, sous l'influence des nouveaux résultats expérimentaux, ont été rejetés les uns après les autres, si bien qu'aujourd'hui nous sommes devant un effondrement total des notions classiques.

La première notion attaquée fut celle de la continuité par le retour à l'atomisme qu'accentuèrent les expériences de Jean Perrin sur le mouvement brownien. Le premier résultat fut de rejeter le principe de Carnot du rang de principe intangible à celui de principe vrai en moyenne. Cette attaque ne devait porter ses fruits que beaucoup plus tard, car l'atomisme était acceptable par la physique classique; en effet son seul résultat était qu'au lieu d'avoir à considérer des systèmes continus on aurait à envisager tout système physique comme un assemblage de petits systèmes, qu'on assimilait à des sphères. Le résultat n'était donc que de changer la représentation des corps, les principes de la mécanique demeuraient inchangés.

A la discontinuité de la matière devait succéder la découverte de la discontinuité de l'électricité (expériences de J. J. Thomson, de H. A. Wilson, de Millikan, de Maurice de Broglie, etc.). Sur ce point encore la continuité classique était battue en brèche; cependant les lois de l'électricité n'étaient pas modifiées: la discontinuité n'introduisait qu'une restriction dans les figurations. Mais de cette discontinuité de l'électricité sortit la notion d'électron qui fut ensuite l'élément fondamental des théories de la constitution de la matière dont le développement devait être si funeste à la physique classique.

Le premier choc contre les théories classiques se produisit dans l'étude du rayonnement du corps noir, par la théorie de Planck qui découvrit la nécessité, pour rendre compte des résultats expérimentaux, d'échanges d'énergie par quanta. Ainsi les échanges d'énergie entre matière et rayonnement ne pouvaient se faire d'une façon continue, mais au contraire d'une façon discontinue, discrète: par quanta. Or cette conclusion était incompatible avec la physique classique et ce fut l'étape décisive qui devait conduire progressivement à son écroulement.

La découverte de l'effet photo-électrique vint augmenter le domaine soumis aux règles des quanta. Pour l'interpréter Albert Einstein se rendit compte qu'il était nécessaire de revenir à une conception corpusculaire de la lumière, qu'on devait la considérer comme formée de grains, les *licht-quanten* ou photons. La découverte ultérieurement de l'effet Compton conduisit à renforcer encore le caractère dualiste de la lumière. Cette théorie des photons eut donc une double conséquence: d'abord elle montra que la théorie ondulatoire de la lumière que l'on croyait définitivement établie depuis Fresnel était à nouveau remise en question. Ensuite elle rompit le caractère unitaire de la physique théorique: des phénomènes n'étaient pas explicables par les théories classiques et ne pouvaient l'être que par une nouvelle théorie bâtie sur des principes totalement différents, la théorie des quanta, qui, à son tour, est incapable d'expliquer les phénomènes ondulatoires. Cette fois la physique classique avait reçu un coup fatal, car l'unité était perdue.

3. Naissance de la théorie de la Relativité. — Un autre coup violent devait être porté à la physique classique par le résultat négatif de l'expérience de Michelson et l'élaboration de la théorie de la Relativité par Albert Einstein. Ses premières conséquences

furent de bouleverser les notions de simultanéité et de temps absolu, ainsi que celle d'espace absolu, pour conduire à la notion d'espace-temps de Minkowski. D'autre part la mécanique newtonienne était modifiée pour constituer la mécanique relativiste, qui seule était valable aux grandes vitesses. Ainsi les notions d'espace et de temps étaient transformées, la mécanique newtonienne cessait d'être valable aux grandes vitesses. C'est donc sur les notions les plus fondamentales et sur celles qui paraissaient le mieux assurées que la physique classique essayait des échecs.

Le développement ultérieur de la théorie de la relativité ne devait plus apporter de bouleversements aussi violents; la relativité généralisée, par sa théorie de la gravitation, ne faisait qu'accentuer les modifications à la Mécanique newtonienne sans ébranler beaucoup plus la physique classique. A l'heure actuelle cette théorie fait figure de théorie classique, car c'est essentiellement une théorie continue. Elle ne peut en effet accepter l'atomisme et à plus forte raison les quanta. Il en est résulté une désunion au sein de la physique: d'un côté la théorie des quanta, de l'autre la théorie de la relativité généralisée, sans possibilité d'union jusqu'à ce jour.

Un des caractères nouveaux que présente la théorie de la relativité même sous sa forme restreinte est l'introduction d'observateurs dans les raisonnements, car la relativité bat en brèche l'objectivité totale de la physique classique; cette objectivité⁽¹⁾ revient à affirmer que, quelque soit le moyen mis en oeuvre pour obtenir un résultat, ce résultat est le même et ne dépend nullement du dispositif de mesure. Au contraire en relativité ce résultat dépend du mouvement de l'observateur par rapport à l'objet physique étudié. Par exemple la longueur d'une règle n'apparaîtra pas la même à un observateur en repos par rapport à cette règle et à un observateur en mouvement le long de celle-ci par suite de la contraction de Fitzgerald-Lorentz. Evidemment on peut attacher un caractère de propriété intrinsèque à la longueur au repos de la règle, mais on a la première manifestation de l'influence du dispositif de mesure sur le résultat de la mesure: le résultat d'une mesure dépend à la fois du système observé et du dispositif de mesure. Nous avons donc encore là une atteinte à une notion fondamentale de la physique classique: à celle d'objectivité.

⁽¹⁾ Voir: JEAN MARIANI. *Les limites des notions d'objet et d'objectivité*. Actualités Scientifiques 519 (1937).

4. *Naissance de la mécanique atomique.* — Les preuves expérimentales de l'atomisme et la découverte de l'électron devaient conduire à une théorie de la structure des atomes, car il fallait bien considérer les électrons comme appartenant aux atomes. Après diverses tentatives, le modèle d'atome qui se montra le meilleur fut celui de Rutherford, de l'atome système solaire en réduction, les forces d'attraction n'étant pas de nature gravitationnelle mais électrique: noyau chargé positivement, possédant la presque totalité de la masse de l'atome et électrons gravitant autour de ce noyau, la force attirant les électrons étant la force de Coulomb.

Mais si l'on adopte un tel modèle d'atome, les électrons, étant soumis à l'accélération due au champ électrique, vont, d'après la théorie électromagnétique classique, émettre un rayonnement continu sur un spectre continu de fréquences, et très rapidement l'atome disparaîtrait. Mais un tel rayonnement n'est pas émis et le rayonnement réel est quantifié. Pour tenir compte de ce fait, Niels Bohr comprit qu'il fallait modifier la mécanique à l'échelle atomique de façon à y introduire les quanta. Sa modification connue sous le nom *d'atome de Bohr*, revenait à n'accepter que certains mouvements pris parmi les mouvements possibles de la mécanique newtonienne comme mouvements acceptables pour les électrons des atomes. De sorte que la quantification se traduit par une restriction sur l'ensemble des mouvements possibles. Il a prouvé d'ailleurs que pour les grands nombres quantiques les mouvements quantifiés tendaient asymptotiquement vers les mouvements classiques. La théorie de Bohr a donc montré qu'à l'échelle atomique la mécanique classique n'était plus valable, et que dans ce domaine s'appliquait une mécanique quantique. De plus la théorie électromagnétique classique n'était plus, elle aussi, valable dans ce domaine. Ainsi se constituait une physique quantique complètement opposée à l'esprit classique.

Cette première théorie de Bohr fut ensuite généralisée et étendue par Wilson et Sommerfeld qui y incorporèrent la théorie de la relativité restreinte. Ainsi on disposait de quatre mécaniques, tout au moins en principe, car de sérieuses difficultés s'opposaient à leur développement complet: 1. mécanique classique, valable à l'échelle humaine et pour des mouvements lents; 2. mécanique quantique non relativiste, valable à l'échelle atomique pour des mouvements lents; 3. mécanique de la relativité

restreinte valable pour les mouvements rapides; 4. mécanique quantique relativiste valable à l'échelle atomique pour les mouvements rapides. Ainsi le rôle privilégié de la mécanique newtonienne disparaissait. C'était là un nouveau coup porté à la physique classique.

Jusqu'à maintenant les modifications apportées à la mécanique newtonienne n'ont été que des changements dans les lois de mouvement; la notion fondamentale de point matériel n'a pas été touchée. Mais si la mécanique quantique du corpuscule unique dans un champ, ou le problème des deux corps qui lui est équivalent a pu être traité avec succès, il fut impossible de parvenir à une mécanique satisfaisante des systèmes. Le problème des trois corps, correspondant à l'atome d'hélium, ne put pas être résolu d'une manière en accord avec l'expérience. La théorie des quanta était dans une impasse. Le progrès vint de deux côtés: par la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie, puis indépendamment par la mécanique des matrices de Heisenberg. C'est l'analogie existant entre la mécanique et l'optique d'une part (principes de Maupertuis et de Fermat; équations de Jacobi et de l'optique géométrique), et d'autre part la relation d'Einstein entre l'énergie du photon et la fréquence de l'onde associée qui devaient le conduire à l'idée que la mécanique de Newton n'était qu'une approximation d'une mécanique ondulatoire et qu'à tout point matériel devait se trouver associée une onde de la même manière qu'à tout photon se trouve attachée une onde. Cette hypothèse hardie qui devait trouver sa vérification trois ans plus tard par la découverte par Davisson et Germer du phénomène de la diffraction des électrons est, de toutes celles émises pour modifier la mécanique classique, la plus fondamentale. C'est elle qui a entraîné l'effondrement de la physique classique déjà fortement ébranlée, car elle touchait à la notion fondamentale de la mécanique: à celle de point matériel.

La mécanique ondulatoire ne devait pas se borner à altérer la notion de point matériel. Elle modifiait en même temps la notion d'onde. D'abord une onde lumineuse ne pouvait plus être conçue sans être associée à des corpuscules (photons) et une onde lumineuse ou électronique ne correspondait pas à un ébranlement d'un milieu, comme étaient les ondes de la physique classique. L'altération de la notion d'onde ne devait pas s'arrêter là. Schrödinger put édifier une mécanique ondulatoire des systèmes parfaitement satisfaisante: seulement l'onde associée au système ne se

propage pas dans l'espace physique à trois dimensions mais dans l'espace de configuration du système qui est à $2n$ dimensions si le système comprend n corpuscules. D'autre part les fonctions d'ondes, même dans le cas d'un corpuscule unique, ne sont pas réelles mais complexes, ce qui ne permet en aucun cas de les considérer comme traduisant un ébranlement. Ainsi la propagation dans l'espace de configuration nous montre le caractère abstrait des ondes de la mécanique ondulatoire.

Mais le plus profond changement qu'a apporté la mécanique ondulatoire a été l'abandon du déterminisme mécanique pour le remplacer par une légalité stochastique. Cette nécessité est apparue par l'impossibilité de mesurer simultanément la position et la vitesse d'un corpuscule. C'est ce qu'expriment les relations bien connues de Heisenberg. Ainsi en physique nouvelle toutes les mesures simultanées ne sont pas possibles, alors que deux mesures simultanées sont toujours possibles en physique classique. En outre il y a abandon du déterminisme classique, pour une mécanique probabiliste. La mécanique ondulatoire a donc porté un coup fatal à la physique classique en bouleversant les notions d'onde, de point matériel, de mesure, de déterminisme mécanique. Mais les coups ne devaient pas s'arrêter là.

5. *Altération de la notion d'objet.* — La notion d'objet s'est trouvée modifiée d'abord en tant que tout objet matériel est constitué de points matériels, car un objet matériel devenait alors un assemblage de corpuscules soumis aux lois de la mécanique ondulatoire. La notion d'objet proprement dite demeurerait en somme inchangée. Mais une altération de cette notion se produisit par la découverte de la création et de l'annihilation des paires électron-positon et de son interprétation par la théorie de Dirac, tout au moins qualitativement. Un objet comme un électron ne subsiste pas éternellement: il peut disparaître; inversement une paire électron-positon peut être créée. Les objets n'ont donc pas toujours une existence éternelle.

Une autre altération de la notion d'objet provient de la perte de propriétés intrinsèques. En effet, en physique classique, toute propriété physique est considérée comme une propriété intrinsèque d'un certain objet physique. Or l'impossibilité de pouvoir effectuer toutes les mesures simultanément, tout en pouvant faire des prévisions pour l'avenir (calculer des probabilités pour des résultats de mesure ultérieurs), a pour conséquence de ne pas

permettre d'attribuer les résultats de mesures aux objets observés comme des propriétés intrinsèques⁽¹⁾. Ceci revient à dire que les objets physiques n'ont pas de propriétés intrinsèques; c'est ce détachement de l'idée de propriété intrinsèque de l'objet à laquelle se substitue l'idée de propriété des opérations de mesure, que M. Jean Mariani indique par l'expression de *Principe de subjectivité*. Ce qui est essentiel en physique nouvelle ce sont les résultats de mesure, qu'on ne peut attribuer qu'au complexe formé par l'appareil de mesure et le système observé, sans pouvoir préciser davantage. Ainsi la notion d'objet elle-même s'est trouvée profondément altérée.

6. *Eroulement de la physique classique*. — Dans cet exposé volontairement très bref et incomplet de l'évolution de la physique depuis une quarantaine d'années, nous avons vu l'éroulement progressif de toutes les notions sur lesquelles était édifiée la physique classique. Actuellement cet éroulement total est consommé. Ce fut d'abord la continuité qui disparut: continuité de la matière, continuité de l'électricité, continuité des échanges d'énergie. Ensuite ce fut la rupture de l'unité de la théorie de la lumière par l'introduction de la notion de photon. En même temps bouleversement des notions de simultanéité, de temps, d'espace, de cinématique et de mécanique, par la naissance de la théorie de la relativité, ainsi que première atteinte à l'objectivité de la physique classique. Puis ce furent la naissance des mécaniques atomiques, des restrictions sur les mouvements possibles, l'altération de la notion de point matériel par la mécanique ondulatoire et son remplacement par la notion de corpuscule, l'altération de la notion d'onde qui devient une notion de plus en plus abstraite, l'impossibilité de certaines mesures simultanées, l'abandon du déterminisme, l'altération de la notion d'objet, la perte pour les objets de propriétés intrinsèques, la modification de la notion d'objectivité. Encore dans cet aperçu rapide n'avons nous pas signalé les toutes dernières modifications: photon complexe de Louis de Broglie modifiant la notion de champ électromagnétique, théorie nouvelle de la relativité de Milne et notre théorie de la mécanique relativiste des systèmes de corpuscules venant retirer à la notion d'espace-temps un caractère de réalité absolue, enfin notre théo-

⁽¹⁾ Voir: J. L. DESTOUCHES. *Principes fondamentaux de Physique théorique*. (Hermann. Paris 1938).

rie de l'espace et du temps, dans laquelle la continuité du temps ou de l'espace n'a aucune réalité.

Ainsi il ne reste aucune notion de la physique classique qui soit demeurée inaltérée, même il n'y en a aucune qui subsiste sans de profondes altérations; l'unité de la physique est détruite: si la théorie des quanta est parvenue à recouvrir tout le domaine de la mécanique classique et d'un bon nombre de théories classiques et même la mécanique de la relativité restreinte, elle n'a pu jusqu'à maintenant s'introduire dans le domaine de la relativité généralisée, ni dans celui de l'électromagnétisme qui est à l'heure actuelle encore en pleine anarchie. Quand à la physique théorique nucléaire autant n'en pas parler. Ainsi à la belle unité de la physique classique a succédé un pluralisme plus ou moins désordonné suivant les domaines et les époques, mais depuis trente ans cette unité est bien détruite.

Nous nous trouvons donc comme devant un empire détruit, chaque partie a repris son indépendance, avec des luttes sur ses frontières pour savoir qui les régit, des régions qui se sont fortement organisées d'une façon autonome, comme la mécanique ondulatoire simple, des régions à l'état anarchique comme le domaine de l'interaction de la matière et de la lumière, d'autres régions qui sont en cours de renouvellement, comme le domaine de la lumière pure sous l'influence de Louis de Broglie, des domaines encore vierges, comme la physique nucléaire, et au contraire des domaines restés fidèles à la continuité, comme la théorie de la gravitation.

7. *La physique nouvelle.* — Devons-nous nous résigner devant cet état de choses? Devons-nous accepter cet écroulement de la physique classique, et la rupture de son unité? Jusqu'à maintenant les physiciens ont cru à l'unité de la physique théorique. Ils ont admis que pendant des époques de crise cette unité peut se trouver rompue, et ont toujours été persuadés qu'un jour elle serait rétablie. Mais ce n'est là qu'une croyance, analogue à la croyance à un Dieu unique. L'impossibilité de concilier la théorie des quanta et la théorie de la relativité sous leur forme actuelle a fait naître au contraire un certain pessimisme et, pour notre part, il nous a semblé pendant plusieurs années que ce retour à l'unité n'était pas réalisable. Mais nous avons pu démontrer⁽¹⁾ qu'il sera tou-

(1) Thèse complémentaire de Philosophie: *Essai sur l'Unité de la Physique théorique.* (Paris 1938).

jours possible de constituer une théorie physique unitaire englobant les diverses théories partielles déjà constituées. C'est là un résultat réconfortant et de grande importance puisqu'il nous conduit à la certitude de l'unité de la physique théorique. Ce résultat acquis, c'est avec une beaucoup plus grande confiance que nous pourrons nous lancer à la recherche des éléments qui devront en former la base, et c'est sur cette espérance au retour à l'unité de l'empire de la physique que nous terminerons ce premier chapitre: c'est seulement alors que sera véritablement édifiée la physique nouvelle.

CHAPITRE II.

THEORIE PHYSIQUE ET THEORIE DEDUCTIVE

1. *Faillite des conceptions classiques.* — L'existence d'une physique nouvelle qui ne peut plus emprunter à la physique classique ses conceptions nous met dans la nécessité d'en établir les fondements sur des bases solides, non pas définitives et absolues à la manière des théories classiques, mais capables de se prêter à des modifications et des aménagements ultérieurs. La faillite de la physique classique réside non pas dans l'écroulement d'une théorie, car il est de toute évidence que les lois classiques demeurent valables en leur domaine (échelle humaine), mais dans l'effondrement d'une conception, celle des réalités absolues et définitives.

Celui qui contemple ces ruines ne saurait naturellement prétendre à rebâtir sur les mêmes principes, car sa construction s'écroulerait aussitôt; d'ailleurs il ne pourrait même plus trouver les matériaux dont disposaient ses prédécesseurs. Pour faire oeuvre constructive il importe d'une part de ne pas perdre de vue les causes de la ruine de l'édifice antérieur, d'autre part d'avoir toujours présent à l'esprit le but même de cette construction qui ne peut pas être placée dans un abstrait pur, mais est en contact avec les réalités que constituent les théories physiques partielles actuelles; il s'agit, en unifiant celles de ces théories qui semblent à première vue incompatibles, de rétablir l'unité de la physique théorique et d'assurer cette construction sur des fondements sûrs au moyen d'une conception générale qui se trouve étroitement adaptée et adéquate.

Cette conception nouvelle ne saurait être exactement limitée à la physique, de même que la conception classique ne s'y trouvait pas cantonnée, mais régissait la science toute entière; bien que ce soit dans le domaine de la physique que la nécessité d'une doctrine nouvelle se fasse sentir avec le plus d'urgence et d'acuité, les différentes parties de la connaissance scientifique sont liées

entre elles de telle façon que tout changement de conception en une des ses parties réagit aussitôt sur l'ensemble de la théorie de la connaissance. C'est pourquoi nos développements ne se bornent pas au domaine strict de la physique mais s'étendent aux domaines voisins et modifient surtout la conception de la logique.

Les caractères fondamentaux de la conception classique ont été mis en lumière par M. Gonthier⁽¹⁾ par ces trois qualificatifs: la connaissance classique est prédicative, univoque, purement rationnelle. Le résultat du premier chapitre a été de nous montrer que la physique ne pouvait plus posséder ces trois caractères. En effet la connaissance dont nous nous sentons capable en physique comme dans tous les domaines n'est pas prédicative; il n'y a aucune certitude qui puisse être réputée indépendante de tout progrès ultérieur du savoir. Pour toute vérité d'ordre scientifique, le plus que nous puissions faire est de délimiter avec plus ou moins de précision un certain champ d'éventualités, où nous nous sentirons en droit d'admettre qu'elle ne sera pas démentie. Mais la notion même de certitude absolue est un soleil mort qui ne remontera plus à l'horizon“.

De même l'univocité de la connaissance même temporisée par la doctrine selon laquelle toute connaissance authentique bien qu'imparfaite représenterait un moment d'une approximation vers une vérité limite qui saisirait adéquatement la réalité prédéterminée, est, comme le montre M. Gonthier, une conception trop simple se révélant impuissante devant de trop nombreux problèmes; par exemple elle ne nous permet pas de rendre compte de l'aspect tantôt corpusculaire, tantôt ondulatoire des phénomènes de même nature. Nous verrons que nous pourrons bien affirmer l'unité de la physique théorique, mais cette unité devra être payée par l'abandon d'une logique unique et universelle: l'unité n'est atteinte qu'au prix d'un abandon de l'univocité de la logique.

Enfin nous ne pouvons pas parvenir à une connaissance rationnelle, c'est à dire „un savoir que la stricte application d'un certain nombre de règles explicitement formulées suffirait à faire sortir d'un certain nombre de principes exhaustivement et explicitement formulés eux aussi⁽²⁾“. Nous nous apercevons de ce ca-

(1) F. GONTHIER. *Communication* au IXe Congrès int. de Philosophie (Congrès Descartes) sur l'unité de la connaissance scientifique fasc. IV. p. 64. (no. 533 des Actualités scientifiques) Paris 1937.

(2) GONTHIER *ibid* p. 66.

ractère en constatant que nous ne pouvons pas construire une théorie formalisée qui ne soit précédée d'une théorie non formalisée. Il n'y a pas d'explication complètement récurrente.

2. *Les notions de base.* Ainsi nous devons construire sachant d'avance que nous n'avons aucune base définitive, que notre connaissance ne peut être ni prédicative, ni univoque, ni rationnelle. Ce ne sont là que des caractères négatifs; quels caractères positifs découvrons nous dans l'examen de la science de notre temps? Notre connaissance bien que non prédicative est loin d'être inexistante, mais, comme nous venons de le dire, pour toute vérité d'ordre scientifique, le plus que nous puissions faire est de délimiter avec plus ou moins de précision un certain champ d'éventualités où elle ne sera pas démentie. Ainsi à la connaissance exhaustive fait place une „connaissance sommaire, même jusque dans les notions primitives, la certitude pratique jouant le rôle de la certitude absolue jusque dans la déduction“. En outre si aucune connaissance n'est prédicative le domaine d'application d'un concept n'est jamais définitivement clos, le sens de celui-ci n'est jamais définitivement fixé, la connaissance que nous y enfermons ne peut être que partielle, imparfaite approchée, *sommaire*. Les concepts scientifiques ne traduisent qu'un découpage schématique et simplificateur non pas d'une réalité préformée, mais d'une réalité qui est construite mentalement à l'aide des concepts déjà dégagés. M. Edouard Le Roy⁽¹⁾ a longuement insisté sur ce que nous formions comme réalité; nous ne reprendrons pas ici ses arguments qui sont bien connus; nous les retrouverons d'ailleurs plus loin sur des exemples particuliers.

Ainsi le sens des concepts n'est nullement déterminé et fixé, leur signification demeure toujours ouverte et en devenir, suspendue entre un concret dont elle est issue et qui en apparaît comme des réalisations et tournée vers un abstrait toujours en formation.

Le caractère sommaire et incomplet qui paraît le côté négatif de la connaissance scientifique a pour complémentaire un caractère simplificateur, qui est le côté positif de cette connaissance. Nous ne retirons donc d'une réalité mouvante formée en partie par nous que des traits essentiels; nous ne pouvons parvenir ainsi qu'à un schéma analogue à une carte géographique d'un pays peu connu: sur cette carte nous ne pouvons pas mettre tous les carac-

(1) EDOUARD LE ROY: Revue de Méta. et Morale. Avril et Juillet 1935.

tères du pays représenté, mais seulement quelques uns d'entre eux qui nous ont paru simples et intéressants. D'ailleurs la plupart des caractères que nous y faisons figurer n'existent que parcequ'ils correspondent à une connaissance schématique existant avant que la construction de la carte ne fut entreprise. Notre schéma ne conservant que certains caractères de la réalité sensible est par cela même abstrait. Un effort d'abstraction est à la base de toute théorie. L'évolution de la physique le prouve surabondamment.

Si l'abstraction joue un tel rôle fondamental, avons nous une méthode qui puisse nous conduire le plus facilement aux abstractions bien adaptées, à l'édification d'une théorie satisfaisante? Il existe une telle méthode, c'est la *méthode axiomatique*; elle fournit, comme l'a si heureusement écrit M. Gonseth⁽¹⁾, le „bréviaire de l'abstraction par schématisation“. C'est en effet „le modèle même d'une méthode intellectuelle aboutissant, à partir du donné concret, à une représentation sommaire et encore en devenir“ ce qui est justement le but que nous devons poursuivre dans l'édification d'une théorie physique.

C'est une opinion très répandue, tant chez les philosophes que chez les scientifiques, que la méthode axiomatique ne peut conduire à la découverte d'aucun résultat nouveau, d'aucune propriété nouvelle, et par suite ne permet aucun progrès effectif, son seul effet étant de mieux ordonner des résultats déjà acquis. Cette opinion est certainement erronée. L'exemple de la Mécanique ondulatoire relativiste des systèmes de corpuscules que nous avons édifiée par cette méthode en fournit pour ainsi dire une preuve matérielle de la valeur heuristique⁽²⁾.

Il nous faut maintenant préciser en quoi consiste cette méthode axiomatique. C'est sur un exemple que nous en ferons le mieux comprendre la nature. Le plus simple est celui de la géométrie élémentaire. Nous ne connaissons aucune réalisation parfaite de la droite géométrique idéale. Toutes celles qui paraissent en être une réalisation authentique perdent cette propriété par un

⁽¹⁾ F. GONSETH *ibid.* p. 68 et *Les Mathématiques et la Réalité* (Alcan Paris 1936) p. 243.

⁽²⁾ Comme des indications précises sur notre théorie nous entraîneraient en dehors de notre sujet, nous prions le lecteur de bien vouloir se reporter à une série de notes aux *Comptes Rendus*: t. 203 (1936) p. 924; t. 204 (1937) p. 1403, p. 1618, à une série d'articles du *Journal de Physique*: t. VII (1936) p. 305, p. 354, p. 427; t. VIII (1937) p. 145, p. 251, ainsi qu'à notre ouvrage: *Principes fondamentaux de Physique théorique* (Hermann 1938).

«changement de point de vue; ainsi une arête d'un cristal n'est un segment de droite qu'à l'échelle macroscopique; à l'échelle atomique il n'en reste à peu près rien. Pourtant à partir de telles apparences globales nous réussissons à construire un ensemble de propriétés, la géométrie élémentaire, qui exprime en somme les lois de déplacement des objets spatialement étendus. „Elle prend la forme théorique une fois achevé le processus qui en fait une construction axiomatique. Mais elle n'en conserve pas moins une signification extérieure dans les réalisations où elle a été primitivement aperçue“⁽¹⁾. C'est de la même façon que doivent se concevoir les rapports de la physique théorique au réel.

3. *La forme théorique.* Comment apparaît la forme théorique? Par les lois du raisonnement qui, comme l'a montré M. Gonseth, se sont progressivement dégagées par des schématisations du même genre que celles qui ont donné issue à la géométrie; on peut de certaines propriétés déjà schématisées parvenir à de nouvelles propriétés, avec une certitude pratiquement assurée si l'on est assez sage pour ne pas trop s'écarter du domaine dans lequel on a pu contrôler que les procédés employés pour y parvenir étaient vérifiés. Dès lors il suffit, ayant accepté certaines lois de raisonnement et aussi certaines lois de définition, de dégager des notions schématisées suffisantes pour retrouver par le raisonnement toutes les notions et les lois dont on aura besoin. Lorsqu'on a atteint ce stade, la schématisation a pris la forme d'une *théorie déductive*.

Plus une notion est schématique, c'est à dire abstraite, plus elle est générale et plus elle embrasse de cas. D'autre part une schématisation introduit des simplifications. Seule une notion très schématisée peut être une notion simple.

Le travail essentiel dans l'élaboration d'une théorie sera de dégager des notions simples, des notions abstraites, et de concevoir les lois qui devront les régir. L'énoncé axiomatique est le terme de cette étude. Une fois qu'on y est parvenu, la théorie est constituée, il ne reste plus qu'à la développer en tant que théorie déductive: ainsi la forme d'une théorie physique achevée est celle d'une théorie déductive. Il nous faut donc préciser ce terme et donner d'une façon plus explicite les raisons de cette forme.

Quelles que soient les opinions du lecteur, c'est un fait que les théories physiques édifiées jusqu'à maintenant sont toutes bâ-

⁽¹⁾ F. GONSETH. Actes du Congrès int. de Philosophie scientifique, Paris 1935. fasc. VI (no. 393 des Actualités scientifiques) p. 11.

ties à la manière d'une théorie déductive. Nous voulons dire par là, comme le texte qui précède le laisse supposer, qu'une théorie admet certaines notions primitives et certains postulats et que tout le reste de la théorie s'en déduit au moyen des règles du raisonnement. Une théorie apparaît ainsi comme un édifice ordonné de propositions traduisant des résultats d'expériences faites ou à faire, si bien qu'à partir de seulement quelques énoncés primitifs il est possible d'obtenir un très grand nombre d'autres énoncés. Sous cet angle une théorie physique apparaît comme un résumé de connaissances permettant une grande économie de pensée. En même temps on la considère comme explicative parce qu'elle rattache, par l'intermédiaire des raisonnements, les faits entre eux qui sans cela paraîtraient désordonnés et incompréhensibles. Ceci nous conduit à examiner de façon précise en quoi consiste une théorie déductive.

4. *Termes primitifs et propositions primitives*: Nous venons de dire qu'une théorie déductive admettait certaines notions primitives et certains postulats et que tout le reste de la théorie s'en déduisait par les règles du raisonnement.

Au début d'une théorie nous distinguerons donc un groupe de termes que nous appellerons les *termes primitifs* ou encore *termes non-définis*; dans le corps de la théorie proprement dite nous les considérerons comme compréhensibles par eux-mêmes et nous nous en servirons sans plus les expliquer (nous verrons plus loin, chapitre V, qu'une explication préliminaire à la théorie doit être donnée, mais celle-ci est en dehors de la théorie déductive). Nous adopterons en même temps la règle selon laquelle nous ne nous servirons d'aucun terme de la théorie considérée sans auparavant en avoir expliqué la signification à l'aide de termes primitifs ou de termes dont le sens a déjà été éclairci. Une proposition donnant une telle explication est dite *définition*, et les termes expliqués seront dits *définis*.

On procède de même avec les lois de la théorie donnée: certaines de ses lois sont dites *propositions primitives* ou *axiomes* ou encore *postulats* et leur vérité est admise sans aucune justification. Quant aux autres lois appelées *théorèmes*, nous nous estimons obligé de les justifier avant d'en admettre la vérité; cette justification ne peut être fondée que sur les axiomes, les définitions et les théorèmes déjà justifiés; on l'appelle *démonstration*.

Lorsqu'on examine une théorie physique on constate que tous les termes primitifs et toutes les propositions primitives ne sont

pas énoncés dès le début: certains ne le sont que lorsque la théorie est déjà assez avancée. Nous rencontrons le même fait en géométrie élémentaire pour le postulat d'Euclide qui n'est énoncé qu'au cours du développement de cette géométrie. Ce cas se rencontre constamment en physique théorique. On peut alors considérer l'ensemble des énoncés comme constituant une théorie déductive; on peut aussi considérer comme théories deductives les théories obtenues en n'acceptant comme termes primitifs et comme propositions primitives que ceux énoncés avant un certain point de la théorie complète; nous appellerons ces théories des *théories deductives partielles*. Nous verrons plus tard qu'elles ont une grande importance pour l'édification des théories physiques. En effet lorsque l'on cherche à construire une théorie physique, des termes sont donnés ainsi qu'un certain nombre d'énoncés (d'origine expérimentale) qui doivent nécessairement appartenir à la théorie. Si on accepte certains d'entre eux comme éléments primitifs d'une théorie déductive, on peut ainsi constituer une théorie partielle; il arrive alors un moment où l'on ne peut plus continuer à classer comme théorèmes certaines propositions que l'on veut prendre en considération, de même que certains termes ne se laissent plus définir avec les termes déjà admis. A ce moment on est conduit à admettre de nouveaux éléments primitifs, c'est à dire de nouveaux termes primitifs ou de nouvelles propositions primitives.

Un premier rôle des théories deductives en physique théorique est donc de permettre une classification: Au fur et à mesure que des termes ou des propositions se présentent ou essaye de les classer comme termes définis ou comme théorèmes; lorsque l'on n'y parvient pas, on les prend comme éléments primitifs. La théorie édiflée avant d'introduire ces nouveaux éléments apparaît alors comme une théorie partielle de cette nouvelle théorie.

Mais le rôle d'une théorie deductive ne se réduit pas à ce rôle de classification, elle a aussi, comme nous l'avons déjà signalé, pour but de faire une économie de pensée et d'être explicative. Précisons d'abord ce qu'est une théorie deductive.

5. *Théorie deductive*. La logique mathématique et les théories mathématiques sont construites suivant les principes que nous avons énoncés ci-dessus. Mais lorsqu'on construit une théorie mathématique, on postule la connaissance d'une logique. M. Tarski⁽¹⁾

⁽¹⁾ TARSKI. *Sur la méthode deductive*. Communication au IX-e Congrès intl. de Philosophie (Congrès Descartes) Paris 1937 fasc. VI p. 95 (no. 535 des Actualités scientifiques).

explique cette expression en disant: „nous traitons tous les termes et toutes les lois de la logique à l'égal des termes primitifs et des axiomes de la science construite: ainsi, nous nous servons des termes de la logique, par exemple, en formulant les lois et les définitions, sans expliquer leur signification, et nous appliquons les lois de la logique dans les démonstrations, sans les avoir justifiées au préalable. En construisant une science, il est parfois commode de postuler, dans le sens qui vient d'être indiqué la connaissance non seulement de la logique mais de certaines sciences mathématiques, précédemment construites; on peut appeler ces sciences, y compris la logique, des *sciences antérieures à la science en question*. Il en résulte qu'avant de commencer la construction d'une science, on est obligé d'énumérer les sciences considérées comme antérieures; par contre tout ce qui a été dit concernant la définition des termes employés et la justification des lois ne s'appliquera qu'aux termes et aux lois *propres* à la science en question, c'est à dire n'appartenant pas aux sciences antérieures.

„La méthode de construction d'une science, qui appliquera les principes que nous venons d'énoncer, est appelée *méthode déductive*; les sciences construites selon ces principes sont appelées *sciences déductives*“.

Dans les théories physiques on suppose toujours comme sciences antérieures, non seulement la logique, mais aussi toutes les théories mathématiques dont on aura besoin; en physique classique, ces théories sont l'analyse mathématique classique et la géométrie euclidienne. En physique nouvelle nous aurons besoin d'autres théories, et même il nous arrivera de rejeter certaines sciences antérieures admises par la physique classique. Par exemple nous avons édifié toute une partie de notre théorie physique unitaire à laquelle nous avons donné le nom de *physique structurale*, sans admettre aucune notion de géométrie. Même plus, nous aurons à rejeter parfois la logique classique pour d'autres logiques, mieux adaptées à la théorie à édifier. A ce sujet précisons dès maintenant qu'il n'y a pas une logique, *la* logique, comme on pourrait le croire à la lecture du texte cité de M. Tarski: en employant le terme „la logique“ il exprime qu'il y a une logique qui est utilisée habituellement dans tous les raisonnements mathématiques, celle que nous désignerons par „logique classique“. Mais si nous avons intérêt à en changer en physique théorique, on ne peut nous empêcher de le faire. Nous justifierons d'ailleurs ce point de vue plus loin. Faisons remarquer aussi que, par logique classique, nous ne voulons nullement opposer la lo-

gique mathématique moderne à des procédés de raisonnement plus anciens qui en sont des schémas moins élaborés, c'est cette logique mathématique que dans notre langage nous désignerons par „logique classique“, terme qui est justifié puisque cette logique est connue dans ses grandes lignes par tous ceux qui ont à étudier des raisonnements précis.

Après cette digression sur les logiques, revenons aux théories déductives. En somme une telle théorie a pour caractéristique d'être un ensemble de termes et d'énoncés tels que:

1. les termes sont divisés en deux classes: l'une est dite classe des *termes primitifs*, l'autre classe des *termes définis*.

2. les énoncés, appelés *propositions* sont divisés, eux aussi, en deux classes: classe des *propositions primitives* et classe des *théorèmes*.

3. Il existe des procédés pour expliquer les termes non-primitifs: ce sont les *définitions*.

4. Il existe des procédés pour justifier les propositions non-primitives ou théorèmes; cette justification s'appelle la *démonstration* du théorème; les procédés qui permettent de la donner s'appellent les *règles du raisonnement*.

6. *Théorie déductive formalisée*. Ce qu'on demande à la méthode déductive c'est d'expliquer les termes non-primitifs et de fournir des démonstrations convaincantes, c'est à dire d'avoir des règles de raisonnement dans lesquelles on ait pleine confiance. Or la conviction et la confiance sont des notions essentiellement subjectives. Un raisonnement peut convaincre l'un et être considéré comme un sophisme par un autre. La querelle à propos de l'axiome de Zermelo ou celle entre intuitionnistes et formalistes en sont des exemples. Pour limiter cette partie subjective, au lieu de laisser apprécier à chacun dans chaque cas particulier la correction d'une définition ou d'une démonstration, on convient d'explicitier des *règles de définition et de démonstration*; ce n'est plus que sur celles-ci que se porte alors le jugement subjectif.

Les règles de définition précisent quelle est la forme des propositions acceptées dans la théorie comme définitions; les règles de démonstration ou règles du raisonnement décrivent les transformations que l'on admet pouvoir faire subir aux lois de la théorie en question pour en déduire d'autres lois. On convient d'admettre le principe que toute définition sera construite conformément aux règles de définition acceptées et toute démonstration

devra consister dans l'application des règles de démonstration acceptées aux propositions déjà justifiées.

Nous appellerons *théorie déductive formalisée* une théorie dans laquelle on a remplacé les énoncés primitifs par des énoncés sur des symboles et où les règles de démonstration sont remplacées par des règles de manipulation des symboles: on aura ainsi des règles de formalisation des définitions et des démonstrations.

7. *Schématisation et théorie déductive.* Si nous revenons à ce que nous disions à la fin du paragraphe 4 sur le rôle des théories déductives dans les théories physiques qui était de fournir une classification entre les termes et les propositions de la physique, nous pouvons considérer que cette classification est un procédé élémentaire de schématisation, de simplification. Ce rôle schématisant des théories déductives va nous apparaître de plus en plus nettement, de sorte que progressivement nous serons placé dans la ligne de pensée de M. Gonseth⁽¹⁾ sur ce sujet. Mais cette schématisation nous apparaît à propos de la notion de théorie déductive elle-même, et il n'est pas sans intérêt de l'examiner d'un peu près, car c'est ce même procédé qui nous apparaîtra de façon constante.

D'abord les axiomes portent sur les termes primitifs, autrement dit dépendent des termes primitifs, ou encore sont fonction de ces termes. Ceci nous amène à adopter comme terme primitif celui de „dépend de“ ou de „fonction de“. Une règle simplificatrice au point de vue graphique que nous pouvons adopter est de représenter tout terme primitif par un signe graphique. D'ailleurs l'assemblage de lettres désignant le terme en question en est déjà un; nous ne faisons donc là qu'une convention d'écriture. Convenons de représenter un élément „fonction de“ certains autres éléments par une lettre suivie entre parenthèses des éléments dont il est fonction.

Figurons par la lettre c avec des indices les termes primitifs d'une théorie déductive, par la lettre p avec des indices les axiomes, et désignons par c_j certains des termes primitifs (éventuellement tous, mais non pas un seul en général); un axiome sera alors figuré par l'écriture $p_k(c_j)$.

Une définition est, avons nous vu, une explication au moyen d'es termes déjà admis, mais ceux-ci sont à leur tour définis par d'autres termes, si bien que finalement les termes définis le sont

⁽¹⁾ F. GONSETH. *Les mathématiques et la réalité* (Alcan Paris 1936).

en fonction des termes primitifs. Nous avons alors comme autre terme primitif celui de „défini par“ et nous le représenterons par le signe $=_d$. Désignons par la lettre a un terme défini et par la lettre f la „fonction définissante“, ce qui est encore un terme primitif, une définition s'exprimera alors par l'écriture:

$$a =_d f(c_j)$$

une définition que nous pourrions écrire ainsi sera dite *définition explicite*. Au lieu de pouvoir définir ainsi un terme, il est possible que l'on ne puisse définir explicitement qu'une fonction de ce terme soit:

$$g(a) =_d f(c_j)$$

nous appellerons une telle définition une *définition semi-implicite*. Il est possible enfin qu'on ne puisse définir le terme a qu'au moyen d'une fonction de a et de termes primitifs c_k c'est à dire par l'écriture:

$$g(a, c_k) =_d f(c_j)$$

une telle définition sera dite *implicite*.

Notre écriture nous a donc apporté quelque chose de nouveau, puisqu'elle nous permet de classer les définitions en trois classes, ce que ne nous suggérerait pas l'écriture courante: nous avons ainsi un schéma graphique plus commode que l'écriture usuelle. Sur ce schéma se manifeste alors le caractère subjectif de la correction des définitions: chacun pourra juger s'il doit accepter seulement des définitions explicites, ou s'il doit accepter les définitions semi-implicites, et même les implicites.

Au lieu de considérer les c_j comme uniquement des termes primitifs ou peut aussi supposer que certains sont des termes définis. D'ailleurs le jugement dépendra de la façon dont se précisera le schéma.

Dans une théorie déductive nous avons enfin un procédé de démonstration; ceci nous introduit un nouveau terme primitif: une démonstration, avons nous vu plus haut, est fondée sur les axiomes, les définitions et les théorèmes. Une démonstration est donc la justification d'une proposition par le fait d'une relation avec une proposition déjà justifiée, relation qu'on exprime par le mot „entraîne“, et qui constitue un nouveau terme primitif; nous le représenterons par le signe $\rightarrow$: soit r un énoncé non encore justifié; il le sera s'il existe un énoncé q déjà justifié tel que:

$$q \rightarrow r$$

Finalement nous pouvons exprimer sous la forme abstraite suivante ce qu'est une théorie déductive:

Une théorie sera dite *théorie déductive* si:

1. On a des termes primitifs: $c_1, c_2, \dots, c_n$.

2. On a des axiomes: $p_1(c_j), p_2(c_j), \dots, p_k(c_j)$.

l'écriture (c_j) étant une écriture abrégée pour désigner des termes primitifs, par exemple pour $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

3. On a un procédé de définition, c'est à dire on a des fonctions définissantes: $=_d f(c_j)$: le terme écrit à gauche étant dit terme défini.

4. On a un procédé de démonstration, c'est à dire un signe $\rightarrow$, le terme écrit à droite étant dit théorème, le terme écrit à gauche étant un axiome ou un théorème déjà justifié.

Une théorie déductive est donc un ensemble de lettres de quatre types, de fonctions définissantes et d'un signe $\rightarrow$. Nous définissons ainsi une classe ouverte: toute théorie qui présentera ces caractéristiques sera de ce fait classée comme théorie déductive. Ceci nous montre que les termes de „théorie déductive“ ont une signification ouverte et en devenir. Nous verrons qu'il en sera de même de toute notion que nous aurons à considérer. Pour s'en convaincre il suffit de se reporter à l'ouvrage déjà cité de M. Gonsseth: *les mathématiques et la réalité*.

Quelles différences existe-t-il entre la première manière dont nous avons défini les théories deductives et cette seconde manière? Tout d'abord nous avons formalisé la définition d'une théorie déductive, c'est à dire que nous avons donné un critère graphique pour reconnaître si une théorie était déductive ou non. Nous avons donc réduit la part du subjectif dans cette appréciation. En outre cette seconde manière est plus abstraite que la première. En formalisant nous nous élevons dans l'abstrait et par suite nous formons un schéma plus général, dont nous ne pouvons délimiter d'une façon précise ni l'étendue, ni le sens: celui-ci demeure en suspens et, comme nous le disions ci-dessus, en devenir.

Sur cette schématisation nous voyons en outre que les mêmes mots sont employés dans deux positions différentes, par exemple „terme primitif“ est employé comme terme primitif dans cette schématisation, comme si nous numérotions les axiomes placés à la base de l'arithmétique. C'est que, dans le cas où l'expression est entre guillemets, on a fait un pas de plus dans la schématisation et que son sens n'est plus le même exactement que dans le sens courant. C'est à dessein que nous avons formalisé en premier lieu

la notion de théorie déductive elle-même, justement pour faire ressortir cette apparence de cercle vicieux. Nous avons là en effet un exemple typique de ce qu'est une axiomatisation pour lequel nous pourrions répéter exactement ce que disait M. Gonseth⁽¹⁾ à propos de l'axiomatisation de l'arithmétique, et dont voici les phrases les plus marquantes:

„Le concept de nombre n'est pas donné une fois pour toutes avec un sens *ne varietur*. Nous l'avons vu se présenter sous des formes de plus en plus abstraites, mais sans que la plus évoluée puisse refouler complètement les formes antérieures (l'intuitive et l'arithmétique). Elle n'existe au contraire que portée par celles-ci. L'activité dans la sphère abstraite s'accompagne d'une activité en quelque sorte parallèle dans les sphères antérieures, sans que jamais l'abstrait puisse se détacher complètement de ses réalisations et prendre une signification autonome“.

Il suffit de remplacer le concept de „nombre“ par celui de „théorie déductive“ pour que ces phrases s'appliquent exactement dans notre cas. Nous vérifions de suite sur notre exemple ce fait mis en lumière par M. Gonseth⁽²⁾ dans un de ses ouvrages antérieurs:

„Toute définition poussée suffisamment loin se recoupe: le cercle vicieux — apparent ou caché — est la caractéristique même de l'axiomatique, lorsqu'elle tente de se suffire à elle-même“.

D'où la nécessité de toujours considérer la constitution d'un schéma axiomatique comme la construction d'un schéma mental, schéma qui est sommaire et simplificateur. C'est là la conception *idonéiste* à laquelle nous serons toujours conduit à nous rallier. C'est ce que nous allons voir à nouveau d'ici peu en cherchant à préciser certains caractères des théories deductives.

8. *Théorie physique et théorie déductive.* Nous constatons donc que le but de la méthode déductive est de remplacer des discussions dans chaque cas particulier par des règles générales de définition et de justification. Elle apporte ainsi une simplification. Il suffira de s'entendre sur les termes primitifs, les axiomes, les règles de définition et de raisonnement. On diminue de la sorte au maximum les possibilités de discussions et surtout on les délimite nettement.

(1) F. GONSETH. *Les mathématiques et la réalité* p. 120 à 139.

(2) F. GONSETH. *Les fondements des mathématiques* (Blanchard, Paris, 1926) p. 239.

La méthode déductive nous apparaît d'abord comme une méthode commode, car elle délimite les notions que l'on peut ou doit modifier, elle fournit des procédés de schématisation et de classement et surtout, grâce aux règles de raisonnement (qui ne nous sont pas données à priori, comme nous le verrons), elle permet de faire une économie de pensée en diminuant le nombre d'éléments primitifs, pour augmenter le plus possible le nombre de ceux qui en dérivent: en somme, on fait un classement ordonné ou plus exactement ramifié, la connaissance des règles adoptées et des têtes de séries permet d'obtenir ensuite tous les autres éléments de la classe.

Ainsi le but poursuivi est de mettre le plus possible d'enchaînements, la connaissance des têtes de chaînes permettant de connaître toute la chaîne en se servant de règles indiquées explicitement. Ces enchaînements fournissent l'essentiel de l'explication scientifique actuelle. Cette méthode est donc sans égale, et on a un avantage évident à l'utiliser dans toute science le plus possible.

Une théorie physique, et il en est de même de toute science liée à l'expérimentation, doit contenir certains termes et certains énoncés. La théorie déductive au sens large que nous lui avons donné dans les pages précédentes constitue un schéma qui nous permet d'établir certains enchaînements entre les énoncés qui portent sur les termes à considérer. Tout enchaînement nouveau établi apporte une simplification et une explication, l'enchaînement établi étant une notion schématique qui prend naissance dans la notion intuitive de cause à effet de la vie courante. Comme à priori nous ne fixons aucune règle précise de définition ou de raisonnement, nous pourrions les choisir toujours de façon telle que, dans le domaine considéré, elles conduisent à des énoncés qui se vérifient. Cette liberté du choix des règles ne doit pas faire croire à une explication verbale, car d'une part ces règles conservent un contenu intuitif et d'autre part, étant édifiées pour un cas extrêmement simple, par exemple pour décrire les lois existentielles des objets usuels (Physique de l'objet quelconque de Gonsseth), elles se trouvent s'appliquer dans un très grand nombre de cas. Dans tous les cas où elles s'appliquent, elles fournissent une explication, puisqu'elles servent pour l'édification du schéma qui n'emprunte à l'ensemble à considérer que les éléments primitifs: on obtient ainsi une explication des autres éléments. En somme, l'explication scientifique ne consiste qu'en la construction d'un

schéma descriptif, et si les règles classiques de raisonnement se montrent inadéquates, ce qui se présente effectivement, comme nous le verrons, on doit les changer et les remplacer par de nouvelles règles mieux adaptées aux éléments à décrire. A ce schéma non-classique nous attribuerons la même valeur explicative, car lui aussi nous fournit des enchaînements qui sont bien adaptés. Les règles classiques n'ont donc à nos yeux aucune valeur supérieure aux autres; c'est seulement une bonne adéquation qui doit nous décider, sans faire appel à d'autres raisons.

Etant donné que ce sont des enchaînements que l'on recherche dans une théorie, nous voyons que celle-ci doit nécessairement revêtir la forme déductive, qui seule permet de la faire apparaître. Donc toute théorie physique achevée est une théorie déductive.

CHAPITRE III.

LOGIQUES ET THÉORIES DEDUCTIVES.

1. *Les règles d'une théorie déductive.* L'importance des théories déductives pour la physique théorique que nous avons mise en évidence dans le chapitre précédent nous conduit à les examiner de plus près ainsi que les règles de définition et de raisonnement.

Les règles de raisonnement se mettent elles-mêmes souvent sous forme de théorie déductive formalisée à laquelle on donne le nom de *logique*. Nous appellerons *théorie mathématique* une théorie déductive formalisée dont les règles de raisonnement constituent une logique. Cette définition nous montre qu'une logique ou bien est une théorie mathématique et par suite est précédée d'une autre logique, que nous pourrions appeler la *métalogique* de la logique considérée, ou bien a des règles de raisonnement qui ne sont pas mises sous forme de théorie déductive formalisée.

Les théories mathématiques classiques sont toutes construites avec une seule logique que nous désignerons par „logique classique“. Sa première partie constitue „l'algèbre des propositions“. M. Gonseth⁽¹⁾ a montré que cette algèbre n'exprimait autre chose que les lois d'existence des objets usuels quelconques, par conséquent traduit des propriétés très élémentaires et très simples, ce qui explique pourquoi ces lois ont un champ d'application si étendu. Mais il ne faudrait pas croire qu'elles sont pour cela universelles et nécessaires. Ce serait contraire à la conception que nous développons et la légitimité de ne les considérer que comme une schématisation valable dans un certain domaine est prouvée matériellement par la non validité de la logique classique dans cer-

(¹) F. GONSETH. Actes du Congrès int. de philosophie scientifique Paris 1935 fasc. VI. p. 1 (no. 393 des Actualités Scientifiques) et *Les Mathématiques et la Réalité* (Alcan Paris 1936).

ains domaines, par exemple en physique quantique, comme l'a montré Mlle Février⁽¹⁾ ou en mathématiques intuitionistes.

Nous sommes donc conduit à ce résultat qu'il ne saurait exister une logique unique fixant à toutes les théories déductives les mêmes lois de raisonnement. Au contraire les théories déductives devront avoir des règles de raisonnement qui leur soient bien adaptées. Nous avons démontré⁽²⁾ que, si nous voulons maintenir toujours l'unité de la physique théorique, ce ne peut être qu'en acceptant des modifications aux règles classiques de raisonnement.

Le fait que l'algèbre classique des propositions est une théorie non-contradictoire et complète, a pour conséquence que toute modification des règles du calcul des propositions ou bien conduit à une théorie contradictoire ou bien a pour effet de rendre moins fortes les règles classiques, c'est à dire de ne pas permettre certains raisonnements. C'est bien ce que nous constatons: les règles classiques conduisent à des affirmations que l'on ne peut accepter, et ce sont des limitations à ces règles dont nous avons besoin. Les règles classiques nous fixent un cadre trop étroit dans certains cas. A vouloir trop affirmer on affirme des inexactitudes, le schéma n'est plus adéquat, il faut lui en substituer un autre. Ceci n'empêche que l'on pourrait choisir pour les fonctions propositionnelles des règles plus fortes que celles de la logique classique L_0 , mais nous ne croyons pas qu'on y ait le moindre intérêt car on peut toujours éviter un tel choix, par adjonction de postulats.

La logique classique n'a donc pour nous aucun privilège particulier: c'est une logique adéquate dans un certain domaine, mais qui ne convient plus pour d'autres. Pour ces autres domaines nous devons construire des logiques qui leur soient bien adaptées. Nous ne saurions donc nous contenter d'une seule logique universelle. Cependant toutes ces logiques ne sont pas sans traits communs et, en ne gardant que les traits communs à deux logiques, on peut définir une nouvelle logique qui les englobe; on retrouvera chacune en précisant certains points de la logique englobante. Nous retrouvons ainsi pour les logiques ce que nous avons pour les espaces abstraits: nous en avons de diverses espèces, nous

(1) PAULETTE FÉVRIER: Comptes rendus t. 204 (1937) p. 481 et p. 958 et Communication au IX-e Congrès int. de Philosophie (Congrès Descartes), Paris 1937, fasc. VI p. 88; (no. 535 des Actualités Scientifiques).

(2) Thèse complémentaire de Philosophie: *Essai sur l'unité de la Physique théorique*.

en construisons qui en englobent plusieurs, les généralisations et les extensions pouvant être faites de différentes manières.

Dans la suite et dans d'autres travaux nous aurons à considérer plusieurs logiques qui sont utiles en physique nouvelle. A ces logiques nous donnerons le nom de *logiques idonéistes*, car c'est la conception idonéiste qui leur a donné naissance: ce sont en effet des schémas adéquats pour l'étude de certains domaines. Nous allons d'abord en définir une qui nous servira de base pour les logiques que nous aurons à considérer par ailleurs⁽¹⁾. Nous la désignerons abrégativement par L_1 .

2. *Notions fondamentales.* Aux termes primitifs nous donnerons aussi le nom de „concepts“; nous les désignerons abrégativement par Tp. Les définitions seront désignées par Df, les axiomes ou „postulats“ par A.

Nous adopterons la schématisation suivante.

Tp. 1. „ensemble“

Tp. 2. „élément d'un ensemble“

Si a est un élément d'un ensemble E on convient d'écrire: $a \in E$

Tp. 3. „type“

A. 1. *Un ensemble n'est pas du même type que ses éléments.*

Tp. 4. „variable parcourant un ensemble“

Tp. 5. „correspondance univoque entre les éléments de deux ensembles“.

Une correspondance est figurée par l'une des deux écritures:

$$y = Tx \quad y = f(x)$$

x étant une variable sur le premier ensemble, y une variable sur le second ensemble; $f(x)$ s'appelle une „fonction de x “, T s'appelle „opérateur“.

A. 2. *Une fonction de fonction est une fonction des variables de cette dernière fonction.*

Df. 1. Une théorie déductive est constituée par:

1°. des „termes primitifs“ $c_1, c_2, \dots, c_n$.

2°. des fonctions de ces termes primitifs dites „fonctions définissantes“ qui transforment un ensemble de termes primitifs en un élément dit „terme défini“.

⁽¹⁾ Par exemple dans notre thèse complémentaire de Philosophie: *Essai sur l'unité de la Physique théorique*.

Si a est un terme défini et f une fonction définissante, on écrit:

$$a =_a f(c_1, \dots, c_n).$$

A. 3. Dans tout raisonnement on peut remplacer une fonction définissante par le terme défini et vice versa.

3. On a des éléments d'un autre type que les termes primitifs qu'on appelle „propositions”. Ce sont des fonctions de termes primitifs ou définis.

4. Parmi les propositions, k sont appelées axiomes: $p_1 \dots p_k$.

5. Il existe un signe $\rightarrow$ qui se lit „entraîne”. A gauche de ce signe on écrit une proposition, à droite s'écrit une proposition qui sera dite „justifiée” si celle écrite à gauche est un axiome ou une proposition justifiée.

On remarquera que nous considérons comme primitifs les concepts, les propositions étant des fonctions des concepts. Ceci est contraire à la formalisation des logisticiens et nous rapprocherait des tendances thomistes concernant la logique.

Df. 2. Une fonction propositionnelle est une fonction établissant une correspondance entre une variable abstraite et une variable sur un ensemble de propositions.

A. 4. Une définition est une proposition, c'est-à-dire qu'une écriture de la forme:

$$a =_a f(c_1, \dots, c_n)$$

est considérée comme une proposition.

Df. 3. On appelle „vraies” les propositions suivantes:

1°. Les axiomes.

2°. Les définitions construites suivant les règles adoptées.

3°. Les propositions justifiées.

Une proposition „vraie” sera précédée du signe $\vdash$.

Df. 4. On appelle „condition sur des éléments” une fonction propositionnelle qui doit être vraie pour tous les éléments mis à la place de la variable.

A. 5. Un ensemble est défini par une condition sur ses éléments, si $f(x)$ est la fonction propositionnelle exprimant la condition, l'ensemble défini sera désigné par:

$$\underset{x}{E} f(x).$$

A. 6. *Règle de particularisation: Si une fonction propositionnelle est vraie pour une variable x , parcourant un ensemble E , on obtient une proposition vraie en remplaçant dans la fonction propositionnelle la variable par un élément de l'ensemble.*

C'est un axiome qui relie la notion de variable à la notion d'élément.

Df. 5. Une proposition qui n'est pas vraie est dite „non-vraie“, ou encore une proposition qui n'est ni un axiome, ni une proposition justifiée, ni une définition correcte est dite „non-vraie“.

A. 7. *$p \rightarrow q$ est une proposition; elle est non-vraie si p est vraie et q non-vraie, vraie si p est vraie et justifie q ; le signe $\rightarrow$ s'applique à toute paire de propositions p, q .*

3. *Les notions de vrai et de faux.* La lecture du paragraphe précédent nous montre que nous ne pouvons formaliser tous les éléments primitifs (concepts et axiomes) d'une théorie déductive qui ne suppose pas de théorie déductive antérieure. Il est aisé de constater qu'on ne peut en effet supprimer les phrases qui y figurent et qui doivent être prises dans le sens du langage courant, sens qui n'est pas déterminé *ne varietur*, mais qui garde une signification en devenir. Ainsi il est impossible de constituer une théorie complètement formalisée qui ne suppose pas une antérieure formalisée. Ceci nous renforce dans la conception que nous développons: il n'y a pas d'abstrait autonome totalement.

Ces notions fondamentales semi-formalisées acceptées, nous allons pouvoir poursuivre l'édification de notre schéma. Nous ne prétendons nullement que les notions que nous venons d'admettre ont été mises sous une forme non critiquable, elle forment seulement une base provisoire qu'on pourra toujours améliorer par la suite. Ce qui compte pour nous dans ce travail, c'est la méthode employée pour constituer un schéma, une théorie déductive, car ce sera le même procédé qui sera employé pour l'édification des théories physiques. Nous laisserons de côté pour des travaux techniques ultérieurs le développement des logiques idonéistes dont nous donnerons ici seulement un aperçu.

La notion de vrai que nous avons introduite et qui paraît conventionnelle ne l'est effectivement pas; en effet nous avons dit: „on appelle „vrais“ les axiomes, les définitions construites suivant les règles adoptées, les propositions justifiées“. Pour que cette définition soit purement conventionnelle, il faudrait que toutes les règles soient conventionnelles. Or nous avons vu que tout terme, ou tout axiome, ou toute règle avait un contenu, une signification

en suspens entre un concret dont il est issu et un abstrait encore en devenir. D'autre part cette définition du vrai est en partie subjective, puisqu'elle dépend des règles de définition et de raisonnement adoptées, et que celles-ci ne sont pas imposées d'une façon unique et nécessaire, mais proviennent d'une schématisation et ne sont pas existantes à priori. La notion de proposition vraie n'est donc pas absolue, mais en partie subjective. Le vrai que nous adoptons n'a dès lors rien de commun avec le vrai platonicien qui ne peut être introduit dans nos considérations. C'est le „vrai idonéiste“.

Une notion qui nous sera fort utile est celle de „valeur logique“. Aux propositions nous ferons correspondre un ou plusieurs signes dits „valeurs logiques“. Parmi eux un s'appelle „valeur logique vrai“; nous le désignerons par V. Un autre est appelé „valeur logique non-vrai“; nous le désignerons par Λ . La fonction qui fait correspondre à une proposition sa valeur logique sera désignée par Vl.

Aux axiomes, aux définitions correctes, aux propositions justifiées nous ferons correspondre la valeur logique V. Une proposition vraie aura donc la valeur logique vrai V. A une proposition qui ne pourra pas être démontrée vraie, c'est à dire à une proposition qui ne pourra pas être justifiée, nous ferons correspondre la valeur logique non-vrai Λ . Donc une proposition indémontrable aura la valeur logique „non-vrai“. En outre nous aurons à considérer des propositions dont la valeur logique n'est pas précisée.

La formalisation de la notion de valeur logique peut se faire de la façon suivante:

Df. 6. On appelle „fonction multivalente“ associée à une fonction $F(x)$ faisant correspondre à x un ensemble d'éléments y d'un ensemble E, une variable y parcourant E telle que:

$$y = f(x) =_a y \in F(x).$$

A. 8. Une fonction, en général multivalente, dite „valeur logique“, est définie sur l'ensemble des propositions. L'ensemble des valeurs de cette fonction est dit „ensemble des valeurs logiques“.

On a

$$y = Vl(x_p).$$

Parmi les éléments de l'ensemble parcouru par y il y a V et Λ . Dans une théorie déductive Th les propositions vraies ont la valeur logique V. Les propositions non-justifiées ont la valeur logique Λ .

Une notion qu'il nous faut maintenant introduire est celle de *négation*. Nous le ferons sous la forme suivante:

A. 9. a) Une fonction, dite *négation*, est définie sur l'ensemble des propositions; elle fait correspondre à toute proposition une autre proposition dite „*négation*“. La *négation* de p sera désignée par $\sim p$.

b) La valeur logique de $\sim p$ est fonction uniquement de la valeur logique de p .

$$Vl(\sim p) = f_{\sim} [Vl(p)].$$

c) La fonction $f_{\sim}$ est définie en partie par les deux conditions:

$$1. \quad Vl(\sim p) = f . =_a . Vl(p) = V$$

$$2. \quad Vl(\sim p) = V . =_a . Vl(p) = f.$$

Comme les propositions qui ne sont pas justifiées ont la valeur Λ , les propositions vraies ayant la valeur logique vrai V , on en conclut qu'une proposition qui a la valeur logique f , que nous appellerons „*faux*“ a en même temps la valeur logique Λ , mais on ne peut être certain que toute proposition ayant la valeur logique Λ , a en même temps la valeur logique f .

Ceci nous conduit à définir entre les valeurs logiques un signe $\preceq$ et à introduire deux axiomes:

A. 10 a) Les écritures de la forme:

$$Vl(p) = \alpha \quad Vl(q) = \beta$$

sont des propositions, α étant une valeur logique, dont la valeur logique est V ou f .

b) Le signe $=$ est symétrique.

$$\text{Df.} \quad \alpha \preceq \beta =_a [Vl(p) = \alpha] \rightarrow [Vl(p) = \beta].$$

$$A. 11. \quad f \preceq \Lambda.$$

Cet axiome laisse supposer qu'il y a plus de deux valeurs logiques. Un axiome est nécessaire pour en fixer le nombre. En logique classique on identifie f et Λ : c'est le principe du tiers exclu. Appelons „*valence d'une logique*“ le nombre de valeurs logiques; le principe du tiers exclu exprime qu'une logique qui y satisfait est bivalente.

Comme nous l'avons déjà dit, la logique classique convient à un très grand nombre de cas, mais ne convient pas pour la totalité des cas rencontrés. Aussi devons nous envisager des logiques

moins restrictives. Nous n'accepterons donc pas ici le principe du tiers exclu et nous ne supposerons pas que les valeurs logiques f et Δ soient identiques.

La partie b) de l'axiome 9 nous conduit à poser les définitions suivantes:

Df. 8. Une fonction qui fera correspondre à une ou à plusieurs propositions une proposition, c'est à dire une fonction propositionnelle dont la variable est un ensemble de propositions, sera dite „opération logique“.

Df. 9. Une opération logique telle que la valeur logique de la fonction propositionnelle obtenue ne dépende que des valeurs logiques des variables de la fonction sera dite *opération logique de première espèce*.

On voit alors que la négation est une opération logique de première espèce.

A une opération logique de première espèce nous pouvons faire correspondre biunivoquement une opération sur les valeurs logiques. Pour les opérations logiques de première espèce faisant correspondre à une proposition une autre proposition nous poserons:

$$\text{Df. 20.} \quad T_v VI(p) =_a VI(Tp).$$

Nous appellerons *opération binaire* ou *relation binaire* une opération logique qui à une paire de propositions fait correspondre une proposition. Elle sera de première espèce si l'opération est de première espèce. Nous poserons alors:

$$\text{Df. 10.} \quad VI(p) R_v VI(q) =_a VI(p R q)$$

4. *La conjonction „et“*. Une notion du langage courant dont nous ne pouvons pas nous passer est celle de la conjonction „et“. Pouvons nous en extraire des caractères simples que nous pourrions axiomatiser et qui nous serviraient dans la totalité de nos raisonnements? Nous avons l'axiomatisation classique du calcul des propositions: 1. pour tout couple de propositions p et q on peut énoncer une proposition „ p et q “ qu'on peut désigner par l'écriture $p \& q$; 2. Cette proposition $p \& q$ n'est vraie que si les deux propositions p et q sont vraies. Il n'est pas douteux que cette schématisation convienne dans un très grand nombre de cas, mais on ne peut affirmer *a priori* qu'elle convienne toujours, c'est à dire que nous ne pouvons être d'avance certain que tout couple d'énoncés qui se présentera pourra donner lieu à un énoncé de ces deux

propositions simultanément qui soit vrai parce que les deux propositions considérées séparément le sont chacune. Mais à l'heure actuelle nous pouvons affirmer le contraire: il existe des couples de propositions tels que la schématisation classique soit inadéquate et inacceptable: il s'agit de propositions exprimant des résultats de mesure en physique quantique. (Ce résultat a été mis en évidence par Mlle Février⁽¹⁾) et lui a servi de point de départ pour une schématisation de la notion de „et“ qui soit en accord avec ce cas.

Nous voyons donc que le sens de la conjonction „et“ n'est pas immuable et que la schématisation classique n'est adaptée qu'à un certain nombre de cas et n'est pas universelle.

Pour l'instant bornons nous à considérer uniquement des propositions pour lesquelles les deux conditions 1. et 2. énoncées ci-dessus soient satisfaites. La condition 2. nous conduit à penser que $\&$ est une opération logique de première espèce. Nous appellerons „logiques du premier genre“ ou de „genre I“ les logiques telles que l'opération $\&$ soit de première espèce et satisfasse aux conditions 1 et 2 ci-dessus.

Ici se pose le problème de la correction de la définition d'une opération logique de première espèce. Ceci nous oblige à admettre une règle de définition, c'est à dire un nouvel axiome; nous lui donnerons la forme suivante:

A. 12. *Une opération de première espèce est correctement définie si la définition donnée permet de construire le tableau des valeurs logiques de l'opération sur les valeurs logiques associée.*

Si la définition donnée ne permet de construire qu'incomplètement ce tableau, la définition est dite „incomplète“; elle sera acceptée provisoirement en n'utilisant que les propriétés de la définition incomplète, tant que ne sera pas donnée une définition complète.

Une définition telle que les conditions pour le tableau des valeurs logiques soit fortement contradictoire sera rejetée.

Par „fortement contradictoire“ on veut dire que l'on devra en au moins un élément du tableau placer deux valeurs logiques qui ne sont pas liées par le signe $\simeq$.

Cet axiome admis, nous définirons ainsi l'opération $\&$:

Df. 12. Une opération logique de première espèce $\&$ est définie par:

1. $p \& q$ n'est V que si p est V et aussi q est V.

⁽¹⁾ Mlle FÉVRIER. Voir Note ⁽¹⁾ p. 31.

$$2. \quad \text{Vl}(p \& q) = \text{Vl}(q \& p).$$

$$3. \quad \text{Vl}(p \& p) = \text{Vl } p$$

S'il n'y a que deux valeurs logiques, cette définition est correcte (et même surabondante); s'il y a plus de deux valeurs elle est incomplète de même que la définition de la négation donnée plus haut.

5. *Logique L₁*. Nous allons définir un calcul des propositions qui est plus large que le calcul des propositions classique. Toute relation vraie dans cette théorie sera vraie aussi dans la théorie classique, mais des relations de la théorie classique ne seront plus vraies. Ce calcul formera la première partie d'une logique que nous désignerons par L₁ ou par „première logique idonéiste“. Cette logique L₁ nous servira de point de départ dans les généralisations ultérieures qui nous seront nécessaires en physique nouvelle.

Nous admettrons une règle de définition plus générale que celle que nous avons admise au paragraphe précédent:

A. 13. *Une définition d'une proposition ou d'une fonction propositionnelle sera correcte si la fonction définissante est une proposition ou une fonction propositionnelle construite au moyen des signes primitifs ou des signes logiques déjà correctement définis.*

Nous poserons alors la définition suivante:

$$\text{Df. 13.} \quad \text{Vl}(p) = \text{T.} =_a. [\text{Vl}(p) = \Lambda] \& [\text{Vl}(\sim p) = \Lambda].$$

Cette définition nous montre qu'il y a au moins trois valeurs logiques complètement distinctes, c'est à dire non liés par le signe $\simeq$, car V, f, T ne peuvent être liées par ce signe. Par contre nous voyons sur cette définition que

$$\text{th 1.} \quad \text{T} \simeq \Lambda.$$

L'existence de cette relation pour T comme pour f nous conduit à définir entre les valeurs logiques une opération que nous appellerons „somme des valeurs logiques“ au moyen des définitions:

$$\text{Df. 14.} \quad p \vee q =_a \sim \sim' p \& \sim' q).$$

$$\text{Df. 15.} \quad \text{Vl}(p) = \alpha \vee \beta \quad =_a. \quad \text{Vl}(p) = \alpha \vee \text{Vl}(p) = \beta.$$

Nous admettrons encore cet axiome:

$$\text{A. 14.} \quad p \rightarrow p \vee q.$$

Cet axiome nous donne le droit de poser un axiome sur les valeurs logiques, qui sera l'un des axiomes caractéristiques de la logique L_1 .

A. 15. *Il n'y a que trois valeurs logiques complètement distinctes: V, f, T, et l'on a:*

$$\Lambda =_a T \vee f.$$

Il suffit de se reporter à la définition du signe $\simeq$ pour voir qu'en vertu de l'axiome 13 on a bien

$$\text{th } 1'. \quad f \simeq \Lambda, \quad T \simeq \Lambda.$$

En effet la première de ces deux relations est l'axiome 10. Pour établir la seconde, remplaçons dans l'axiome 14 la lettre p par $Vl(p) = T$ et q par $Vl(p) = f$; nous avons:

$$Vl(p) = T \rightarrow Vl(p) = T \vee Vl(p) = f$$

comme on a le principe général qu'on peut remplacer une fonction définissante par le terme défini, nous avons

$$Vl(p) = T \rightarrow Vl(p) = T \vee Vl(p) = f$$

et d'après l'axiome 15:

$$\text{th } 1''. \quad Vl(p) = T \rightarrow Vl(p) = \Lambda;$$

en remplaçant cette relation par celle obtenue en introduisant le signe $\simeq$ on a bien la relation que nous voulions établir. La propriété de T qui résulte de sa définition est bien satisfaite si nous acceptons l'axiome 15, il n'entraîne donc pas de contradiction sur ce point.

Il nous faut maintenant démontrer que la négation est une opération logique de première espèce correctement définie. Pour cela il nous faut construire le tableau des valeurs de l'opération négation. Les conditions c) de l'axiome 9 nous fixent une partie des éléments de ce tableau: les cas où p est V ou f. Il nous reste à fixer le cas où p est T. Auparavant nous poserons une définition:

$$p \equiv q =_a Vl(p) = V(q).$$

D'après la partie b) de l'axiome 10 nous avons:

$$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p).$$

Revenons à la définition 12; nous avons:

$$Vl(p) = T =_a [Vl(p) = \Lambda] \& [Vl(\sim p) = \Lambda].$$

Désignons par ξ la valeur logique de $\sim p$ dans ce cas; nous aurons:

$$Vl(\sim p = \xi) = a \cdot Vl(p) = T.$$

D'après la définition ci-dessus de T qui fait intervenir $\sim p$ on voit que l'on doit avoir nécessairement:

$$\xi \simeq A$$

d'après l'axiome 15, il s'ensuit que ξ est f ou T. Si ξ était égal à f, d'après la définition de la négation, on aurait $Vl(p) = V$ ce qui serait contraire à l'hypothèse, donc ξ ne peut avoir cette valeur. Alors ξ est égal à T ou bien il y a contradiction. Il est facile de constater que si $\xi = T$ il n'y a nulle contradiction: la définition de la négation est donc correcte et complète: le tableau des valeurs de la négation est ainsi complet, nous avons en effet:

th 2.

p	V	f	T
$\sim p$	f	V	T

On voit alors sur ce tableau que:

th 3.

$$\sim \sim p \equiv p.$$

La définition du signe $\equiv$ nous montre que c'est une opération logique de première espèce, dite *identité logique*; sa définition est correcte car elle nous permet de construire immédiatement le tableau de ses valeurs. Nous appellerons „*matrice logique*“ un tableau de valeurs logiques d'une opération binaire.

Nous avons en effet la valeur logique V si les deux propositions ont la même valeur logique et la valeur f dans les autres cas en vertu de l'axiome 10 (partie a), d'où la matrice de $\equiv$:

th 4.

$\equiv$	V	f	T
V	V	f	f
f	f	V	f
T	f	f	V

Il est facile de constater que les conditions imposées jusqu'à maintenant aux opérations de première espèce $\&$ et $\vee$ sont incomplètes pour les définir. La plus grande partie de ce caractère incomplet vient du peu de précision sur le signe $\rightarrow$. Il nous faut

admettre sur lui de nouveaux axiomes, c'est à dire donner des règles de raisonnement.

6. *Règles fondamentales de raisonnement dans L_1 .* Les règles de raisonnement résident d'une part en des principes généraux comme le droit de remplacer une fonction définissante par le terme défini et *vice versa* en toutes circonstances (axiome 3 d'une théorie déductive p. 33) ou comme l'axiome 6 (règle de particularisation) qui a pour effet de relier les notions de variable et d'élément, d'autre part les axiomes dans lesquels figurent le signe $\rightarrow$: ce sont les axiomes 7 ($p \rightarrow q$ est une proposition), et 14 (règle sur l'opération $\vee$).

La première question qui se pose, par suite de l'axiome 7, est de savoir quelles sont les valeurs logiques de la proposition $p \rightarrow q$. Le signe $\rightarrow$ s'applique à tout couple de propositions, d'après l'axiome 7; mais on ne sait si $\rightarrow$ définit une opération logique de première espèce; les seules conditions imposées sur ce signe jusqu'à maintenant ne sont pas en contradiction avec cette hypothèse. D'autre part tant qu'on se limite à des opérations de première espèce, si p ou si q est formé en appliquant de telles opérations, seule leur valeur logique doit intervenir. Ceci nous conduit à introduire un nouvel axiome:

A. 16. a) *Le signe $\rightarrow$ définit une opération logique de première espèce.*

b) $p \rightarrow q$ est toujours V ou f.

Cet axiome accepté, il nous faut déterminer la matrice de cette opération ainsi que les matrices des opérations $\&$ et $\vee$. Il est facile de constater que les conditions imposées jusqu'à maintenant ne fournissent que des définitions incomplètes pour ces trois opérations. La condition 3) de la définition de l'opération $\&$ nous fixe les éléments diagonaux des matrices des opérations $\&$ et $\vee$; la condition 2) fixe que ces matrices sont symétriques. L'axiome 14 nous fixe de nombreuses conditions, tant sur les matrices $\&$ et $\vee$ que sur la matrice $\rightarrow$. On constate en effet que cet axiome impose que si p et q sont f, $p \rightarrow q$ est V, de même si p et q sont T. Puis que si p et q sont l'un f l'autre V la proposition $p \& q$ est f, et si p ou q est V la proposition $p \vee q$ est V. Ce résultat à son tour entraîne que si q est V la proposition $p \rightarrow q$ est V. Il nous reste alors dans chaque matrice deux éléments qui ne sont pas complètement déterminés. Une nouvelle condition est nécessaire pour achever cette détermination. Comme elle doit porter sur le signe

$\rightarrow$ elle constitue une nouvelle règle de raisonnement; nous ne pouvons l'introduire que par un nouvel axiome. Nous admettrons:

$$A. 17. \quad (\sim p) \vee q \rightarrow (p \rightarrow q).$$

Cet axiome nous fixe d'abord, les matrices étant en partie déterminées comme nous venons de l'indiquer, que si p est f la proposition $p \rightarrow q$ est V . Puis en adjoignant à cet axiome l'axiome 14 on voit que si p est f et q est T on doit avoir pour $p \vee q$ la valeur T , ce qui entraîne que si p est T et q est V la proposition $p \& q$ est T . Il en résulte alors si p est T et si q est f que $p \rightarrow q$ est V , ce qui achève de déterminer les matrices de nos trois opérations; nous aurons donc:

th 5.	$\rightarrow$	V	f	T	$\&$	V	f	T	$\vee$	V	f	T
	V	V	V	V	V	V	f	T	V	V	V	V
	f	f	V	V	f	f	f	f	f	V	f	T
	T	f	V	V	T	T	f	T	T	V	T	T

A partir de ces matrices nous pourrions construire celles de toutes les combinaisons des signes $\sim$, $\equiv$, $\rightarrow$, $\&$, $\vee$.

Ce qui fait le caractère spécial d'une logique en tant que théorie déductive, c'est que le signe de justification $\rightarrow$ est en même temps opération binaire pour les propositions: c'est ce qu'exprime l'axiome 7 complété par l'axiome 16. Dans une logique ce signe a donc un double rôle: il exprime la justification des énoncés ou propositions, et en même temps d'une paire de propositions, c'est à dire d'une paire des éléments étudiés dans la théorie, il permet de construire une troisième proposition.

Si nous voulons donner une signification extérieure aux trois valeurs logiques V , f , T , de la logique L_1 , nous devons considérer V comme signifiant le „vrai démontrable“, f le „faux“ pris dans le sens de „la négation est démontrable“, T le „tiers“ signifiant la „non-démontrabilité“ à la fois de la proposition et de sa négation. Le „non-vrai“ V signifie le „non-démontrable“; une proposition non-vraie est, d'après l'axiome 15, fautive (au sens précisé ci-dessus) ou tierce: c'est ce qu'exprime la relation $V = T \vee f$.

L'opération $\sim$ a le sens usuel de la négation compte tenu du tiers; l'opération $\equiv$ a le sens habituel de l'identité; les opérations $\&$ et $\vee$ sont liées par la formule classique, toutefois la présence du tiers modifie un peu, mais légèrement, leur sens habituel: on le voit de suite sur les matrices; enfin le signe $\rightarrow$ a les propriétés:

essentielles de l'implication, mais les règles de raisonnement sont moins fortes qu'en logique classique par suite du tiers.

7. *Principales formules du calcul des propositions de L_1 .* Maintenant que nous connaissons les matrices des opérations fondamentales de première espèce de la logique L_1 , il est aisé d'obtenir des identités.

Une fonction propositionnelle de variables propositionnelles sera une identité de première espèce si elle est formée au moyen d'opérations logiques de première espèce et si elle a toujours pour valeur logique V, quelle que soit la valeur logique des variables qui y figurent. Pour s'assurer qu'une telle fonction est bien une identité, il suffit de construire le tableau de ses valeurs logiques pour les diverses valeurs logiques de ses arguments; la construction de ce tableau n'offre pas de difficultés, mais en général est assez longue. On peut souvent la simplifier en utilisant des identités déjà établies, c'est à dire qu'au lieu d'avoir recours à une vérification matérielle on utilise une démonstration algébrique. Mais les premières identités ne peuvent être établies que par construction du tableau des valeurs.

Par cette construction, on trouve ainsi que l'axiome 14 entraîne la transitivité de l'identité:

$$\text{th 6.} \quad \vdash (p \equiv q \ \& \ q \equiv r) \rightarrow p \equiv r.$$

Rappelons aussi que la définition de la négation entraîne que deux négations équivalent à une affirmation, c'est à dire que:

$$\text{th 3.} \quad \vdash \sim \sim p \equiv p.$$

La forme des matrices de nos opérations fondamentales entraîne d'abord la transitivité de l'implication, c'est à dire la transitivité de la justification d'une proposition, qui est une règle de raisonnement importante; elle précise le sens de la notion de justification, et il semble que dans toute logique on doive conserver cette propriété; elle s'exprime sous la forme:

$$\text{th 7.} \quad \vdash (p \rightarrow q) \ \& \ (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

On constate aussi que les opérations $\&$ et $\vee$ sont associatives, propriétés qui sont liées au sens intuitif de „et“ et de „ou“ qui elles aussi sont à conserver dans toute logique; ces associativités s'expriment par:

th 8. $\vdash (p \& q) \& r \equiv p \& (q \& r).$

th 9. $\vdash (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

La symétrie des matrices des opérations $\equiv$, $\&$, $\vee$, donne immédiatement:

$\vdash (p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$

$\vdash (p \& q) \equiv (q \& p)$

$\vdash (p \vee q) \equiv (q \vee p)$

la première de ces trois identités a déjà été écrite plus haut; la seconde est une seconde écriture pour la condition 3. de la définition de l'opération $\&$, enfin la troisième résulte de la seconde d'après la définition de l'opération $\vee$.

Les matrices des opérations fondamentales nous donnent encore les relations:

th 10. $\vdash (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r \vee q \rightarrow r)$

th 11. $\vdash (p \rightarrow q \& p \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q \& r)$

th 13. $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \vee r).$

Nous avons les cinq propositions primitives qui figurent au début de la thèse de Jacques Herbrand (p. 18); la première est immédiate, la seconde est exprimée par l'axiome 14 et la symétrie de $\vee$, la troisième résulte immédiatement de cette symétrie, la quatrième de l'associativité de $\vee$. Enfin la cinquième n'est autre que la dernière formule que nous avons écrite. Le calcul des propositions dans L_1 est donc très voisin de celui de la logique classique, et s'y réduit si on ne considère qu'un ensemble de propositions dans lesquelles aucune n'est tierce; cependant il y a un certain nombre de différences, c'est ainsi que $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$ n'est pas identique à $p \equiv q$, on a au contraire en posant:

Df. 17. $p \leftrightarrow q =_d (p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$

comme matrice de l'opération $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$	V	f	T
V	V	f	f
f	f	V	V
T	f	V	V

qui est distincte de l'identité. Nous l'appellerons „relation d'équivalence“; elle nous sera particulièrement utile plus loin pour définir l'équivalence de deux systèmes d'axiomes d'une théorie déductive. En logique classique cette opération se réduit à l'identité.

De même une relation couramment utilisée en logique classique sur l'inversion du signe $\rightarrow$ n'est plus vraie dans la logique L_1 ; elle est à remplacer par la relation d'usage moins commode:

th 13. $\vdash (p \rightarrow q) \& \sim [(Vl(p)=T) \& (Vl(q)=f)] \rightarrow . (\sim q \rightarrow \sim p)$

en logique classique le terme entre crochets disparaît.

En outre des identités que nous venons d'écrire dans les lignes qui précèdent signalons encore:

th 14. $\vdash (p \& q) \rightarrow p$

th 15. $\vdash (p \equiv q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

th 16. $\vdash p \& (p \equiv q) \rightarrow q$

th 17. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \& r) \rightarrow q.$

Enfin indiquons que l'équivalence est transitive; on peut l'établir en construisant un tableau de valeurs ou en utilisant des identités que nous avons déjà écrites: on utilise deux fois la relation de la transitivité de $\rightarrow$, puis on applique deux fois la dernière relation que nous avons écrite (th. 17), enfin en utilisant le th. 11, on obtient le résultat cherché:

th 18 $\vdash (p \leftrightarrow q) \& (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r).$

cette relation nous servira beaucoup dans la suite.

L'identité et l'équivalence sont toutes deux des relations *réflexives* ($p \equiv p$ et $p \leftrightarrow p$ sont vraies), *symétriques*, *transitives*. Nous appellerons „relation de classification“⁽¹⁾ toute relation binaire possédant ces trois propriétés. Comme nous l'indiquerons plus loin, on peut à une telle relation attacher un groupe de transformations sur les termes de cette relation de façon qu'elle soit invariante dans la transformation.

8. *Non-contradiction du calcul des propositions dans L_1 .* On peut distinguer deux degrés dans la non-contradiction du calcul des propositions dans L_1 : 1. *non-contradiction faible*: on n'aura jamais la possibilité de démontrer simultanément la vérité d'une proposition et de sa négation, c'est à dire qu'on n'aura jamais à

⁽¹⁾ G. KUREPA: Thèse de Doctorat ès-sciences Paris 1935. p. 8.

poser $V = f$ ou $V = \Lambda$: 2. *non-contradiction forte*: on n'aura jamais à poser $V = f$ ou $V = T$ ou $f = T$.

Pour démontrer la non-contradiction faible il suffit d'utiliser la *méthode d'application*: à toute opération logique de première espèce de la logique L_1 on peut faire correspondre biunivoquement une opération de première espèce de la logique classique de façon qu'à toute proposition de L_1 formée avec les opérations de première espèce corresponde une proposition de la logique classique qui soit vraie si sa correspondante dans L_1 est vraie; ainsi à toute proposition vraie de L_1 correspondra une proposition vraie de la logique classique L_0 et la non-contradiction faible du calcul des propositions dans L_1 sera prouvée. Pour établir cette correspondance il suffit de remarquer qu'à une proposition élément de L_1 on peut faire correspondre biunivoquement une proposition élément de L_0 , puis qu'à toute opération fondamentale de L_1 on peut associer biunivoquement une opération de L_0 qu'on obtient en remplaçant f et T par Λ . qu'ensuite toute identité fondamentale de L_1 est aussi une identité de L_0 .

Alors comme toute proposition sera construite en utilisant successivement un certain nombre de fois les opérations fondamentales et que, si elle est vraie, sa correspondante est vraie, à chaque fois qu'on fait intervenir une opération, il s'ensuit que toute proposition vraie de L_1 aura une correspondante dans L_0 qui sera vraie. Dans cette démonstration nous nous sommes servi de la méthode de récurrence sur la construction de la proposition de Jacques Herbrand⁽¹⁾.

Pour démontrer la non-contradiction forte il faut ou bien la démontrer par récurrence sur la construction, ou bien employer à nouveau la méthode d'application, la correspondance étant obtenue cette fois en remplaçant dans les matrices V et f par V et T par F , puis en remplaçant V et T par V et conservant f . Nous ne précisons pas davantage car il n'y a pas de difficultés à pousser à son terme la démonstration, puisqu'en somme on répète une seconde et une troisième fois la méthode déjà employée.

9. *Réduction du nombre d'opérations fondamentales*. Il est évident qu'à partir d'une seule opération binaire fondamentale et d'un nombre suffisant d'opérateurs de la première espèce, c'est à dire d'opérations transformant une seule proposition, comme la

⁽¹⁾ JACQUES HERBRAND: Thèse de Doctorat ès-sciences. Paris 1935. p. 5 et p. 18.

négarion, on peut obtenir toute opération binaire de première espèce. Or un opérateur est plus simple qu'une opération binaire et à nombre égal d'opérations fondamentales on a intérêt à n'avoir qu'une opération binaire et des opérateurs.

On constate qu'on peut aisément réduire d'une unité le nombre d'opérations fondamentales par le même procédé que celui employé par Nicod⁽²⁾ dans L_0 : la négation se trouve définie ainsi que le produit logique & à partir d'une opération binaire dite „incompatibilité“. Posons en effet:

$\mid$	$\mid$	V	f	T
V	$\mid$	f	V	T
f	$\mid$	V	V	V
T	$\mid$	T	V	T

nous aurons alors les définitions suivantes:

$$\begin{aligned}\sim p &=_{\alpha} p \mid p \\ p \& q &=_{\alpha} (p \mid q) \mid (p \mid q) \\ p \vee q &=_{\alpha} (p \mid p) \mid (q \mid q).\end{aligned}$$

L'opération $\mid$ à elle seule ne permet pas de définir dans L_1 les opérations $\rightarrow$ et $\equiv$, tandis qu'elle suffit dans L_0 ; il nous faut encore des opérateurs pour y parvenir. Nous avons un moyen simple d'en définir, c'est à une proposition p de lui faire correspondre $Vl(p) = \alpha$ qui est une proposition vraie lorsque p a la valeur logique α et qui est fausse dans les autres cas. Un seul opérateur de ce type nous suffit, posons:

$$V p =_{\alpha} Vl(p) = V$$

L'opérateur V sera alors défini par la tableau:

p	$\mid$	V	f	T
$V p$	$\mid$	V	f	f

Il est facile de voir que l'on peut poser:

$$p \rightarrow q =_{\alpha} V p \mid V \sim q$$

ou encore

$$p \rightarrow q =_{\alpha} V (V p \mid \sim q)$$

⁽²⁾ NICOD: Proc. Cambridge phil. Soc. Vol. 19 (1917).

ces deux définitions sont équivalentes et donnent lieu à la même matrice: les deux seconds membres sont identiques.

Pour l'identité nous avons une somme logique de trois termes, chacun correspondant à une matrice ayant tous ses éléments f sauf un sur la diagonale qui est V, soit:

$$p \equiv q =_a [V \sim (p|q)] \vee [V \sim (\sim p|\sim q)] \vee [\sim V\{(p|q) \vee (\sim p|\sim q)\}]$$

on pourrait adopter une autre définition qui conduise à la même matrice pour l'opération $\equiv$ mais il n'en est pas qui soit beaucoup plus simple. On voit ainsi que toutes les opérations de la logique L_1 peuvent s'obtenir à partir d'une opération binaire et d'un opérateur. On a donc au moins deux signes fondamentaux, tandis que dans la logique classique L_0 une seule opération binaire suffit pour définir toutes les opérations de première espèce.

10. *Le calcul des propositions et l'algèbre.* Un trait caractéristique du calcul des propositions dans L_0 est de constituer une algèbre de Boole, le produit étant l'opération $\&$, l'addition $+$ le signe signifiant „ou avec exclusion“, l'unité e la valeur logique V, le zéro la valeur logique f, (ces définitions sur e et o supposent qu'on considère les opérations sur les valeurs logiques associées aux opérations logiques), enfin l'égalité étant l'identité logique.

On doit se demander si, dans la logique L_1 , on peut trouver une opération logique jouant le rôle d'une addition de façon que le système constitue un anneau dont l'égalité soit l'identité. Il est facile de constater que 1) l'unité sera la valeur logique V, le produit étant $\&$. 2) la condition de distributivité du produit par rapport à l'addition exige que le zéro soit la valeur logique f. 3) les conditions:

$$a \oplus o = a = o \oplus a$$

$$a \oplus a = o$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

achèvent de déterminer l'opération $\oplus$; nous trouvons en effet comme matrice de cette opération:

$\oplus$	V	f	T
V	f	V	f
f	V	f	T
T	f	T	f

On constate que cette opération n'est pas associative et de plus que si

$$c = a \oplus b$$

on n'a pas d'opération inverse (soustraction) ni auto-inversion de $\oplus$; c'est à dire qu'on n'a pas:

$$b = c \oplus a \quad \text{ni} \quad b = c - a$$

l'opération $\oplus$ n'a donc pas toutes les propriétés de l'addition, l'égalité adoptée étant l'identité logique. Même en renonçant à la distributivité, on ne peut pas trouver d'opération satisfaisant à toutes les autres propriétés de l'addition. Les opérations de première espèce de L_1 ne définissent donc pas un anneau, l'égalité étant l'identité logique; il n'en est pas de même si l'on adopte l'équivalence comme égalité. Ceci n'empêche qu'on peut considérer les propositions et ces opérations comme constituant un système autonome qu'on peut mettre sous forme d'une théorie déductive.

11. *Opérations de seconde espèce.* Aux opérations de première espèce nous adjoindrons des opérations d'un autre type, dites *opérations de seconde espèce*. Un nouveau terme primitif nous est nécessaire pour introduire une de ces opérations. Nous poserons:

Tp 6. $\exists x$ „il existe un x tel que...”

opération qui s'appliquera à toute fonction propositionnelle $f(x)$. Sur ce terme nous admettrons un premier axiome, qui n'a pas son correspondant dans L_0 où il se réduit à l'identité:

A. 18. $\exists x f(x) \equiv \exists x V f(x)$.

Au moyen d'une définition, nous introduirons un second signe de seconde espèce: (x) dont la signification est „quel que soit x ”; nous poserons:

Df. 18. $(x) f(x) \equiv \sim \exists x \sim V f(x)$

définition qui s'accorde bien avec la notion intuitive de „quel que soit” car „quel que soit x ...” a bien le même sens que „non il existe un x tel que non-vrai que...”.

Les relations que nous venons d'écrire étant valables pour toute fonction propositionnelle $f(x)$ le sont encore en remplaçant $f(x)$ par $\sim V f(x)$ ce qui nous donne en utilisant l'axiome 18;

th. 19. $\sim (x) \sim V f(x) \equiv \exists x f(x)$

en recommençant à substituer à $f(x)$ la fonction $\sim \forall f(x)$ et en utilisant l'axiome 18, nous obtenons:

$$(x) \forall f(x) \equiv (x) f(x)$$

ce qui nous montre qu'on pourrait aussi bien adopter (x) comme terme primitif et définir ensuite $\exists x$. Ces deux opérations sont corrélatives. On remarquera que nos relations sont distinctes comme forme de leurs correspondantes dans L_0 . En effet ce n'est pas la négation $\sim$ qui intervient seule mais $\sim \forall$ à l'intérieur des signes de seconde espèce. Ce changement est dû à la présence de la valeur logique tierce T ; il a pour conséquence de modifier la façon dont se présente la recherche de l'*Entscheidungsproblem* dans L_1 par rapport à ce qu'elle est dans L_0 .

Nous avons besoin encore d'autres règles de passage, d'où un nouvel axiome, exprimant les secondes règles de passage et pour lesquelles nous adopterons une forme qui correspond à celle que leur a donnée Herbrand⁽¹⁾ dans le cas de L_0 ; mais elles sont nettement différentes, le signe $\leftrightarrow$ remplaçant ici l'identité:

$$A. 19. \quad [\exists x f(x)] \vee p \leftrightarrow \exists x [f(x) \vee p].$$

$$A. 20. \quad [(x) f(x)] \vee p \leftrightarrow (x) [f(x) \vee p]$$

la raison pour laquelle nous avons seulement le signe $\leftrightarrow$ et non $\equiv$ est que nous avons la relation

$$(\forall p) \vee q \leftrightarrow \forall (p \vee q)$$

et non celle obtenue en remplaçant le signe $\leftrightarrow$ par l'identité $\equiv$. Il nous faut encore deux axiomes pour introduire les règles de généralisation:

$$A. 21. \quad f(x) \rightarrow (x) f(x)$$

pour toute fonction propositionnelle f de la variable x .

A. 22. Pour toute fonction propositionnelle de deux variables $f(x, y)$ on a:

$$f(x, x) \rightarrow \exists y f(x, y).$$

Nous ne développerons pas davantage cette logique L_1 . Les cinq axiomes que nous venons d'admettre permettent de faire correspondre à toute fonction propositionnelle de L_1 une fonction propositionnelle de L_0 avec correspondance biunivoque des signes

(1) Jacques HERBRAND. Thèse de Doctorat ès-Sciences Paris 1930 p. 32.

de première et de seconde espèce, de façon qu'à toute proposition vraie dans L_1 corresponde une proposition vraie dans L_0 . Il s'ensuit que si L_0 n'est pas contradictoire L_1 ne le sera pas non plus. Ceci démontre ce que nous appellerons plus loin la *consistance* de L_1 par rapport à L_0 .

Cette logique L_1 nous servira de cadre formel pour les discussions à venir sur les fondements des théories physiques, et nous utiliserons dès le chapitre suivant une généralisation de cette logique pour continuer l'étude des théories déductives.

CHAPITRE IV.

CONDITIONS IMPOSEES A UNE THEORIE DEDUCTIVE. EQUIVALENCE

1. *Théorie déductive formalisée.* Dans les chapitres II et III nous avons défini sous une forme générale ce que nous appelons „théorie déductive“.

Rappelons cette définition:

Dr. 1. Une théorie déductive est constituée par:

1. des „termes primitifs“ $c_1, c_2, \dots, c_n$.
2. Il existe des fonctions de ces termes primitifs dites „fonctions définissantes“ qui transforment un ensemble de termes primitifs en un élément dit „terme défini“.
3. On a des éléments d'un autre type que les termes primitifs qu'on appelle „propositions“. Ce sont des fonctions de termes primitifs et de termes définis.
4. Parmi les propositions, k sont appelées „axiomes“.
5. Il existe un signe $\rightarrow$ qui se lit „entraîne“. A gauche de ce signe on écrit une proposition, à droite s'écrit une proposition qui sera dite justifiée si celle écrite à gauche est un axiome ou une proposition déjà justifiée.

Une théorie déductive est dite „théorie déductive formalisée“ si: 1°. On a remplacé les énoncés primitifs par des énoncés sur des symboles; 2°. les règles de définition et de démonstration adoptées sont remplacées par des règles de manipulation des symboles; 3°. toute définition est construite conformément aux règles de définition, toute démonstration consiste uniquement dans l'application des règles de raisonnement aux propositions déjà reconnues pour vraies, les propositions „vraies“ étant 1) les axiomes, 2) les définitions construites suivant les règles adoptées. 3) les propositions justifiées.

Nous appellerons *théorie déductive normale* toute théorie déductive formalisée telle que:

1. Entre tout couple de propositions il existe une opération & qui est une certaine schématisation de la conjonction „et“ dont le sens primitif a été convenablement modifié.

2. A toute proposition p on peut faire correspondre une proposition dite „négation de p “ et désignée par $\sim p$ qui est une extension du sens classique de la négation. Nous ne supposons rien de plus pour l'instant sur ces deux opérations.

Nous avons appelé „*théorie mathématique*“ toute théorie déductive formalisée dont les règles de raisonnement étaient elles-mêmes mises sous forme d'une théorie déductive qu'on appelle „*Logique*“.

Nous appellerons „*théorie déductive classique*“ une théorie déductive formalisée normale telle que:

1°. C'est une théorie mathématique, c'est à dire que ses règles de raisonnement constituent une théorie déductive.

2°. La logique employée est telle que:

a) Le signe $\rightarrow$ est une opération logique de première espèce;

b) Il n'y a qu'une opération primitive de première espèce; elle est désignée par le signe $|$. Le signe $\rightarrow$ se définit à partir de celui-ci par la relation

$$p \rightarrow q =_d p | (q | q).$$

Cette condition 2°. peut s'exprimer plus simplement sous la forme: 2'. La Logique employée a pour calcul des propositions celui de la logique L_0 .

Il est évident que les conditions 2 et 2' sont équivalentes: ceci résulte immédiatement de la définition du calcul des propositions dans L_0 , de sa réduction à une seule opération fondamentale, l'incompatibilité, et de la définition de l'implication à partir de l'incompatibilité suivant la formule indiquée.

Les théories mathématiques habituelles sont des théories deductives classiques, mais toute théorie déductive que l'on aura à considérer ne sera pas classique; par exemple, si nous adoptons comme logique L_1 , aucune théorie déductive construite sur cette logique ne sera classique (le mot „classique“ étant pris dans le sens spécial que nous avons indiqué).

La non-classicité d'une théorie déductive normale ne peut venir que du rejet soit de la condition 1°, soit de la condition 2°; le rejet de la première exprime que la théorie considérée n'est pas mathématique (au sens indiqué), de la seconde que le calcul des propositions adopté n'est pas celui de L_0 . Si nous conservons la pre-

mière condition et que nous rejetons la seconde, ce rejet peut être effectué de deux manières suivant qu'on rejette la condition a) ou la condition b). Le rejet de b) revient à dire qu'il y a plus d'une opération primitive de première espèce. Il est alors nécessaire dans ce cas qu'il y ait au moins trois valeurs logiques.

Nous avons fait remarquer dans le chapitre précédent qu'il ne pouvait y avoir de théorie déductive formalisée sans qu'il y ait antérieurement une autre théorie déductive soit formalisée, soit non-formalisée. Il ne peut exister, comme nous l'avons constaté et comme l'a longuement montré M. Gonseth⁽¹⁾, de théorie déductive formalisée qui ne soit précédée d'une théorie non-formalisée. Ceci traduit la non-indépendance de l'abstrait vis à vis de l'intuitif, et a pour conséquence que le point de vue hilbertien ne peut se suffire et que l'on est obligé d'admettre l'idonéisme dans toute tentative axiomatique.

Jusqu'à présent nous n'avons fait qu'un travail de classification concernant les théories déductives; il nous faut maintenant examiner si on doit imposer aux théories déductives des conditions. Pour cela nous devons examiner successivement quelles conditions il convient d'imposer aux termes primitifs, aux axiomes, aux règles de définition et de démonstration. Dans cette étude nous supposons seulement que nous avons une théorie déductive normale.

2. *Conditions sur les termes primitifs.* Pour préciser les conditions à imposer aux termes primitifs reportons nous au texte de M. Tarski⁽²⁾: „On a une assez grande liberté dans le choix des termes primitifs et des axiomes; il est faux de croire que certains termes ne se laissent définir d'aucune façon, et que certaines lois ne peuvent être démontrées par aucun moyen. Appelons *équivalents* deux systèmes de propositions si toute proposition du premier se laisse démontrer à l'aide des seules propositions du deuxième système et *vice-versa*. Si en construisant une science mathématique fondée sur un certain système d'axiomes, on trouve un système de lois équivalent audit système d'axiomes, il est théoriquement possible de reconstruire toute cette science en admettant comme axiomes, le dit système de lois et en démontrant les propositions admises auparavant comme axiomes. Tout ceci concerne également — *mutatis mutandis* — les termes primitifs d'une langue

(1) F. GONSETH. *Les Mathématiques et la réalité*.

(2) A. TARSKI. Communication au Congrès Descartes p. 97.

mathématique: on peut remplacer le système de ces termes par n'importe quel autre système de termes de cette science qui lui est équivalent, c'est à dire tel que chaque terme du premier système puisse être défini exclusivement à l'aide des termes du second et *vice-versa*."

Nous voyons donc d'abord qu'il n'y a aucune condition absolue sur les éléments primitifs d'une théorie déductive, ensuite qu'une telle théorie n'est définie qu'à une équivalence près. Mais avant d'examiner de plus près cette notion d'équivalence, nous allons introduire la notion d'*indépendance des termes primitifs*.

Nous dirons qu'un système de termes primitifs est un système *indépendant* si aucun terme de ce système ne peut être défini à l'aide des autres termes primitifs; en somme s'il n'y a aucun terme primitif superflu. Cette condition peut se formuler de la façon suivante:

$$\sim [c_i =_d f(c_j)] \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

la notation $i = 1, 2, \dots, n$ signifiant qu'on doit écrire les n relations obtenues en donnant à la lettre i les diverses valeurs de 1 à n , le nombre de termes primitifs étant n .

Nous avons tout intérêt à réduire au minimum le nombre des termes primitifs, d'après ce que nous disions au chapitre II sur la notion de théorie déductive: une telle théorie a pour but d'expliquer les termes définis au moyen des règles de définition, seuls les termes primitifs sont supposés compréhensibles par eux-mêmes, et ne sont pas expliqués dans le corps de la théorie (ce qui n'exclut pas qu'ils aient été expliqués en dehors de la théorie formalisée proprement dite). Moins grand sera le nombre de ces termes, meilleure sera la théorie, car moins de connaissances seront réclamées pour pouvoir saisir la théorie. Le but d'une théorie déductive est de diminuer le plus possible le nombre d'éléments sur lesquels la discussion peut porter, on doit donc chercher à réduire leur nombre au minimum, d'où l'intérêt de l'indépendance.

3. *Equivalence. Groupe d'équivalence.* Au paragraphe précédent nous avons appelé *équivalents* deux systèmes d'axiomes tels que toute proposition de l'un peut être démontrée au moyen des axiomes du second. Nous pouvons formuler l'équivalence des systèmes d'axiomes de la façon suivante: désignons par $p_1, p_2, \dots, p_k$ les k axiomes d'un des systèmes, par $q_1, q_2, q_3, \dots, q_l$ les l

axiomes de l'autre, et posons:

$$p =_a p_1 \& p_2 \& \dots \& p_k$$

$$q =_a q_1 \& q_2 \& \dots \& q_l$$

L'équivalence s'exprimera par

$$p \rightarrow q_i \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$q \rightarrow p_j \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Nous voyons sur ces relations que si un système d'axiomes P est équivalent à un système Q, ce système Q sera équivalent à P, l'équivalence des systèmes d'axiomes est donc une relation symétrique (les lettres P et Q désignent respectivement l'ensemble des p_i et des p_j).

Si le signe $\rightarrow$ satisfait aux deux axiomes suivants:

Axiome 1. Entre tout couple de propositions de la forme $p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$ l'opération $\&$ s'applique et elle n'est vraie que si les deux autres propositions sont vraies.

Axiome 2. $(p \rightarrow q) \& (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \& r)$.

L'équivalence des deux systèmes s'exprimera par:

$$\vdash (p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p).$$

Nous pouvons encore simplifier cette écriture en posant la définition suivante:

$$p \longleftrightarrow q =_a (p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$$

car alors la condition d'équivalence s'exprime simplement par:

$$\vdash p \longleftrightarrow q$$

Pour que la définition de ce signe $\rightarrow$ soit correcte, il faut admettre une règle de définition: celle exprimée par l'axiome 13 du chapitre précédent.

Si le signe $\rightarrow$ satisfait en même temps qu'à l'axiome 1 ci-dessus à la condition de transitivité:

Axiome 3. $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

ainsi qu'à l'axiome suivant:

Axiome 4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \& r \rightarrow q)$

nous constatons que la notion d'équivalence d'un système d'axiomes est transitive. (Remarquons que les conditions exprimées par

les axiomes 1 à 4 énoncés ci-dessus sont satisfaites dans les logiques L_0 ou L_1 ; il suffit de se reporter au chapitre précédent pour s'en assurer.).

Soit en effet trois systèmes d'axiomes tels que le premier soit équivalent au second et le second au troisième, nous avons en désignant par p, q, r , les produits logiques des axiomes de chacun d'eux:

$$\vdash (p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r) ; \quad \vdash (r \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$$

d'après l'axiome 3 nous avons:

$$(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$(r \rightarrow q) \& (q \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow p)$$

en appliquant deux fois l'axiome 4, puis en appliquant l'axiome 1, et enfin la définition du signe $\leftrightarrow$, nous obtenons:

$$\text{Théorème 1. } (p \leftrightarrow q) \& (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$$

ce qui établit la transitivité de l'équivalence des axiomes.

Considérons alors les transformations qui transforment un système d'axiomes en un système équivalent. Nous considérerons comme non-distinctes deux théories équivalentes; ces transformations ont donc pour effet de transformer la théorie en elle-même.

Nous allons montrer que ces transformations forment un groupe. En effet le produit de deux transformations, c'est à dire deux transformations successives, transforme un système d'axiomes en un système équivalent, en vertu du théorème précédent; donc ce produit est une transformation de notre ensemble. Ensuite la transformation inverse d'une transformation de l'ensemble est aussi une transformation de cet ensemble en vertu de la symétrie de l'équivalence. Puis la transformation identique est un élément de notre ensemble. Enfin le produit des transformations est associatif, c'est à dire que si T_1, T_2, T_3 , sont trois transformations telles que:

$$q = T_1 p \quad r = T_2 q \quad s = T_3 r$$

on a évidemment:

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$$

le signe $=$ désignant l'identité des transformations. Ces propriétés nous montrent que les transformations qui transforment un système d'axiomes en un système équivalent forment un groupe que nous appellerons le „groupe d'équivalence des axiomes de la théo-

rie". Nous le désignerons par le signe $\mathcal{G}_a$. Une théorie déductive est un invariant de ce groupe.

D'une façon analogue, au paragraphe précédent nous avons appelé équivalents deux systèmes de termes primitifs tels que tout terme de l'un peut être défini par des termes de l'autre. Nous pouvons formuler cette condition d'équivalence de la façon suivante: désignons par $c_1, c_2, \dots, c_m$ les m termes primitifs de l'un des systèmes, par $d_1, d_2, \dots, d_n$ les n termes primitifs de l'autre; désignons par les lettres f et g avec des indices convenables les fonctions définissantes du second et du premier système; l'équivalence s'exprimera par:

$$\begin{aligned} d_i &= a f_i(c_1, c_2, \dots, c_m) & i &= 1, 2, \dots, n \\ c_j &= a g_j(d_1, d_2, \dots, d_n) & j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Nous voyons sur ces relations que si un système C est équivalent à un système D, le système D sera équivalent à C, l'équivalence des systèmes de termes primitifs est donc une relation symétrique (les lettres C et D désignent respectivement l'ensemble des c_j et des d_i).

Nous admettrons l'axiome suivant, qui sera une nouvelle règle de définition:

Axiome 5. Si un terme a est défini en fonction de termes $c_1, c_2, \dots, c_m$ et si ces termes ne sont plus pris comme termes primitifs, mais sont eux-mêmes définis en fonction de termes $d_1, d_2, \dots, d_n$, le terme a est défini correctement par les termes définis $c_1, c_2, \dots, c_m$; on peut considérer alors f comme une fonction composée des termes $d_1, d_2, \dots, d_n$ et écrire au lieu de

$$a = a f(c_1, c_2, \dots, c_m) \quad c_i = g_i(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

la relation de définition:

$$a = a f[g_1(d_1, d_2, \dots, d_n), g_2(d_1, d_2, \dots, d_n), \dots, g_m(d_1, d_2, \dots, d_n)]$$

ce que nous considérerons comme une fonction de $d_1, d_2, \dots, d_n$. Dans l'énoncé de cet axiome on ne suppose nullement que les systèmes des c_i et des d_i sont équivalents. La signification de cet axiome est que des termes définis au moyen de termes définis sont correctement définis.

Cet axiome a pour conséquence immédiate la transitivité de l'équivalence des termes primitifs.

Considérons alors les transformations qui transforment un système de termes primitifs en un système équivalent. Ces transformations forment un groupe car en vertu de la transitivité de

l'équivalence deux transformations successives appartiennent encore à l'ensemble, ce produit est évidemment associatif comme tout produit de transformations, l'inverse d'une transformation appartient à l'ensemble ainsi que la transformation identique. A ce groupe nous donnerons le nom de *groupe d'équivalence des termes primitifs de la théorie*. Nous considérons comme non-distinctes deux théories ayant des termes primitifs équivalents et des axiomes équivalents lorsqu'on prend les mêmes termes primitifs. Ainsi une théorie est invariante vis à vis des transformations de ce groupe. Nous le désignerons par le signe $\mathfrak{G}_t$.

Une théorie déductive est donc un invariant de son groupe d'équivalence des axiomes et un invariant de son groupe d'équivalence des termes primitifs. Lorsque nous effectuons une transformation du premier de ces groupes, les termes primitifs ne sont pas modifiés. Si nous effectuons une transformation du second de ces groupes, les axiomes restent invariants, les termes qui y figurent au lieu d'être primitifs sont des termes définis; on peut alors les remplacer par leur fonction définissante, mais ceci ne change pas le système d'axiomes. Il en résulte que toute transformation de l'un des groupes commute avec toute transformation de l'autre. Considérons alors le produit (ordinaire) de ces deux groupes, soit $\mathfrak{G}_e$ ce produit. Les groupes $\mathfrak{G}_{ta}$ et $\mathfrak{G}_{tt}$ en sont des sous-groupes invariants qui n'ont pas d'autre élément commun que la transformation identique. Il s'ensuit que le groupe $\mathfrak{G}_e$ est le produit direct des deux groupes définis plus haut:

$$\mathfrak{G}_e = \mathfrak{G}_{ta} \times \mathfrak{G}_{tt}.$$

Nous appellerons ce groupe produit le *groupe d'équivalence de la théorie déductive considérée*. Toute transformation de ce groupe transforme la théorie en elle-même, et toute transformation n'y appartenant pas la transforme en une théorie non-équivalente, c'est à dire en une théorie distincte.

4. *Théories deductives isomorphes en équivalence*. Nous dirons que deux théories deductives sont *isomorphes en équivalence* si leurs groupes d'équivalences sont isomorphes. A tout système de termes primitifs de l'une correspond biunivoquement un système de termes primitifs de l'autre, à tout système d'axiomes de l'une correspond biunivoquement un système d'axiomes de l'autre. Mais en général on ne peut affirmer que deux telles théories sont identiques. En général elles seront distinctes. L'intérêt de ces théo-

ries isomorphes en équivalence est double. On peut se demander, en effet, s'il peut exister deux telles théories ayant des règles de définition ou de raisonnement distinctes, et dans ce cas en quoi l'étude de l'une conduit à des résultats concernant l'autre. (Naturellement ce sont les deux groupes d'équivalence qui sont isomorphes, c'est à dire le groupe produit, car si l'isomorphie n'était établie qu'avec un seul des groupes d'équivalence l'existence de deux telles théories va de soi et elle n'offrirait aucun intérêt). On établirait ainsi des rapprochements entre des règles différentes et des théories différentes. D'autre part, si ayant les mêmes règles de définition et de raisonnement il existe deux théories isomorphes distinctes, il existe entre elles une certaine analogie de structure qu'il faudrait mettre en évidence; si au contraire deux telles théories ne pouvaient exister sans être équivalentes, c'est à dire non distinctes, c'est que le groupe d'équivalence suffirait à caractériser une théorie déductive, avec des règles de définition et de raisonnement données: On peut montrer que ceci n'a pas lieu.

Une autre question qui est liée à ces groupes est de savoir, les axiomes et les termes primitifs étant choisis indépendants, si le nombre de termes primitifs et le nombre d'axiomes sont des invariants du groupe d'équivalence. Mais il est difficile de répondre à toutes ces questions.

Nous pouvons d'abord affirmer que *le nombre de termes primitifs indépendants n'est pas un invariant du groupe d'équivalence de la théorie considérée.*

Pour établir ce résultat il suffit de citer un exemple de théorie où l'on peut définir des termes primitifs, dont le nombre ne se conserve pas par équivalence. Ceci est bien facile, il nous suffit de citer l'algèbre classique des propositions: nous pouvons prendre comme termes primitifs par exemple $\sim$ et $\&$ ou au contraire prendre $|$. Dans un cas nous avons deux signes primitifs, dans l'autre un seul, et il y a bien équivalence, au sens que nous avons défini plus haut et ces deux systèmes sont formés de termes indépendants, puisque dans un cas il n'y en a qu'un et dans l'autre on ne peut définir $\&$ au moyen de $\sim$, ni $\sim$ au moyen de $\&$. La définition de ces signes est semi-implicite mais les propositions sont définies explicitement. Nous avons en effet:

$$\begin{aligned} \sim p &=_{\text{a}} p \mid p & p \mid q &=_{\text{a}} \sim(p \& q) \\ p \& q &=_{\text{a}} \sim(p \mid q) \end{aligned}$$

ce qui prouve bien l'équivalence et par suite la non-invariance du

nombre de termes primitifs dans une transformation du groupe d'équivalence en général.

Ce résultat nous montre qu'entre deux théories équivalentes une différence s'impose par le nombre de termes primitifs.

Les ensembles de transformations du groupe d'équivalence qui conservent le nombre de termes primitifs constituent des sous-groupes.

Dans la théorie que nous avons prise en exemple une telle transformation serait une changeant le signe $\&$ en $\vee$ par :

$$p \vee q =_a \sim (\sim p \& \sim q) \quad p \& q =_a \sim (\sim p \vee \sim q)$$

une transformation d'un autre sous-groupe sera définie par la transformation changeant $|$ en $||$ avec :

$$p || q =_a [(p | p) | (q | q)] | [(p | p) | (q | q)]$$

$$p | q =_a [(p || p) || (q || q)] || [p || p) || (q || q)].$$

Ainsi dans le groupe d'équivalence des termes primitifs d'une théorie, nous avons à distinguer les sous-groupes qui laissent invariants le nombre de termes primitifs indépendants. Toute transformation du groupe appartient à un tel sous-groupe ou bien change le nombre de termes primitifs. De ces nombres de termes primitifs il y en a un qui est le plus petit. Il lui correspond un sous-groupe qui peut éventuellement ne comprendre que la transformation identique (une transformation qui ne ferait que transformer l'ordre des termes primitifs sera considérée comme se réduisant à la transformation identique), ce sous-groupe offre un intérêt spécial ainsi que les transformations qui transforment un système quelconque de termes primitifs en un système qui comprend le nombre minimum. Nous notons donc que *l'indépendance ne suffit pas pour avoir le nombre minimum de termes primitifs*. On peut encore réduire davantage. Le même esprit qui anime la conception des théories déductives et qui nous a conduit déjà à prendre des termes primitifs indépendants, nous conduit à rechercher le nombre minimum de termes primitifs. Nous dirons qu'une théorie dont on peut réduire le nombre de termes primitifs est *réductible en termes primitifs*; dans le cas contraire nous dirons qu'elle est *irréductible en termes primitifs*. Le sous-groupe du groupe d'équivalence qui conservera le nombre minimum de termes primitifs sera dit *groupe d'équivalence irréductible des termes primitifs*.

Il ne semble pas qu'il soit facile de fournir un critère permettant de reconnaître si une théorie est irréductible au non. En toute généralité on ne peut être certain de l'irréductibilité d'une théorie que s'il n'existe qu'un seul terme primitif dans chaque type de termes et que ce terme soit indépendant des autres termes, mais ceci demanderait à être précisé; par exemple pour L_1 on ne peut réduire à une seule opération, donc avec $\mid$ et V on a un système irréductible d'opérations.

On peut se demander si la réduction du nombre des termes primitifs ne va pas altérer le nombre des axiomes; il est facile de voir qu'il n'en est rien, car ceux-ci demeurent invariants, le seul changement étant que les termes qui y figurent ne sont plus primitifs mais sont des termes définis, ce qui n'a aucune importance pour les axiomes. Par exemple l'axiome 3 énoncé page 57 demeure le même, que le signe $\&$ soit un terme primitif ou un terme défini. On a donc intérêt, chaque fois qu'on peut, à rendre une théorie irréductible.

Essayons maintenant de dégager quelques traits existant entre des théories isomorphes en équivalence. Une telle isomorphie établit une correspondance biunivoque avec conservation du produit des transformations entre les transformations du groupe d'équivalence. Cette isomorphie du groupe produit direct entraîne l'isomorphie de chacun des groupes facteurs. Si p_1 de la première théorie est transformé en q_1 , ces deux lettres désignant le produit direct des axiomes des deux systèmes

$$p_1 \longleftrightarrow q_1 \qquad q_1 = T_1 p_1$$

il correspond à T_1 une transformation T_2 dans la seconde et il existera au moins un système d'axiomes de cette seconde théorie tel que

$$p_2 \longleftrightarrow q_2 \qquad q_2 = T_2 p_2$$

Considérons l'ensemble E_{p_1} des propositions q_1 telles que $p_1 \longleftrightarrow q_1$; pour que cet ensemble soit défini correctement il faut que nous introduisions un nouveau signe primitif: $E \Phi(x)$ signifiant „l'ensemble des x tel que $\Phi(x)$ “, c'est à dire l'ensemble des éléments satisfaisant à cette condition. Nous avons donc:

$$E_{p_1} = E_{q_1} p_1 \longleftrightarrow q_1$$

on a évidemment $q_1 \longleftrightarrow p_1$ pour tout élément q_1 de cet ensemble; soit r_1 un autre élément de cet ensemble (pour désigner un élé-

ment d'un ensemble il nous faut employer un nouveau signe primitif $\in$ signifiant „appartenant à“) r_1 appartient à E_{q_1} et ceci pour tout élément r_1 de E_{p_1} convenons que $p \rightarrow p$, nous aurons alors:

$$q_1 \in E_{p_1} \& r_1 \in E_{p_1} \rightarrow r_1 \in E_{q_1}$$

ceci résulte de la transitivité du signe $\rightarrow$. Ce résultat établit que l'ensemble E_{p_1} est indépendant de l'élément p_1 de cet ensemble pris pour le définir. C'est donc une donnée essentielle pour une théorie déductive que cet ensemble. Il en résulte que le groupe d'équivalence des axiomes est le groupe des transformations biunivoques de cet ensemble E_{p_1} en lui-même puisque les transformations du groupe d'équivalence font passer d'un élément p_1 de cet ensemble à un élément q_1 de cet ensemble. On en conclut que, si cet ensemble est fini, le groupe d'équivalence des axiomes est un groupe de permutations, et s'il est dénombrable c'est le groupe S_∞ des permutations d'un ensemble dénombrable d'objets défini par Schreier et Ulam⁽¹⁾.

Nous voyons que si deux théories sont isomorphes en équivalence les ensembles E_{p_1} et E_{p_2} ont même puissance, condition nécessaire pour que deux groupes de permutations soient isomorphes. Cette condition est aussi suffisante pour l'isomorphie, d'où cet énoncé:

La condition nécessaire et suffisante pour que deux théories aient des groupes d'équivalence des axiomes isomorphes est que l'ensemble des propositions s'entraînant l'une l'autre issues d'un système d'axiomes, c'est à dire l'ensemble des systèmes d'axiomes équivalents de l'une des deux théories, ait même puissance que l'ensemble correspondant de l'autre.

Les conditions d'isomorphies pour les termes primitifs sont plus difficiles à mettre en évidence, car le nombre de ces termes n'est pas constant, et nous n'avons pas indiqué de méthode permettant de caractériser ce groupe.

Donc deux théories ayant même puissance pour leurs ensemble de systèmes d'axiomes équivalents ont leurs groupes d'équivalence des axiomes isomorphes et réciproquement.

Deux théories ayant mêmes règles de définition et de raisonnement et mêmes termes primitifs ne différeront que par les systèmes d'axiomes. Le théorème précédent nous montre qu'elles ne seront pas en général isomorphes en équivalence. Si elles le sont,

⁽¹⁾ SCHREIER et ULAM. *Comptes Rendus* t. 197 (1933) p. 387.

il est possible qu'elles soient distinctes, mais ceci aurait besoin d'être démontré.

Deux théories ayant des règles de raisonnement distinctes et mêmes termes primitifs, si elles sont isomorphes en équivalence, ont nécessairement des axiomes distincts, sauf si les différences de règles de raisonnement n'interviennent pas dans l'application du signe $\leftarrow \rightarrow$. Nous n'étudierons pas plus avant les théories isomorphes en équivalence, car cette notion ne nous servira guère dans la suite.

Retenons de cette étude sur l'équivalence, comme résultats essentiels, l'existence du groupe d'équivalence qui est le produit direct de deux groupes: le groupe d'équivalence des termes primitifs et le groupe d'équivalence des axiomes. Le premier de ces deux groupes facteurs contient un sous-groupe important, le sous-groupe d'équivalence irréductible des termes primitifs de la théorie. Enfin notons l'importance de la réduction du nombre de termes primitifs d'une théorie, qui n'est pas assurée par la condition d'indépendance; d'où la distinction entre théorie réductible et irréductible en termes primitifs.

5. *Conditions imposées aux axiomes.* Nous devons porter notre attention sur les axiomes, et préciser les conditions générales auxquelles ils devront être assujettis. Tout d'abord, nous pouvons imposer la condition *d'indépendance des axiomes*, condition qui exprime qu'un axiome de la théorie ne peut être démontré au moyen des autres axiomes.

Lorsqu'une proposition p sera un produit de propositions contenant comme terme une proposition q , c'est à dire lorsque

$$p =_d q \& r \quad \text{ou} \quad p \equiv (q \& r)$$

nous conviendrons d'écrire:

$$r \equiv (p - q)$$

La condition d'indépendance des axiomes s'écrira comme suit avec cette notation, en posant:

$$p =_d p_1 \& p_2 \& \dots \& p_k$$

condition d'indépendance:

$$\sim (p - p_i \rightarrow p_i) \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

De même que nous avons intérêt à choisir des termes primi-

tifs indépendants, nous avons intérêt à choisir un système d'axiomes indépendants. La démonstration de l'indépendance dépend évidemment des règles de raisonnement adoptées. Il faudra démontrer chacune des k propositions écrites ci-dessus. Cette démonstration ne sera pas toujours facile, mais elle n'est pas fondamentale, car on peut toujours constituer la théorie avec un système d'axiomes non-indépendants, quitte ultérieurement à réduire le nombre d'axiomes.

Une autre condition importante est que les axiomes soient choisis de telle manière que la théorie déductive soit *non-contradictoire*, c'est à dire que de deux propositions contradictoires quelconques p et $\sim p$ il y en ait au moins une qui ne puisse être démontrée dans cette théorie. Un système d'axiomes qui est tel que cette condition soit remplie est dit système *non-contradictoire d'axiomes*. La non-contradiction dépend évidemment du système d'axiomes choisi et des règles de raisonnement adoptées.

La non-contradiction est une condition importante pour une théorie déductive appartenant à un édifice de physique théorique, car si une proposition de cette théorie correspondant à un énoncé expérimental est démontrée vraie et sa contradictoire vraie aussi, une expérience effectuée ne donnera qu'un seul résultat et ce ne peut être que l'un ou l'autre. Si on répète l'expérience, ou bien elle donnera toujours le même résultat ou bien elle donnera tantôt l'un, tantôt l'autre, mais jamais les deux à la fois puisqu'on n'a qu'un seul résultat à la fois. Donc un schéma théorique conduisant à une telle contradiction est inadéquat, il doit être modifié. Si au contraire la contradiction n'apparaît que sur un énoncé qui ne correspond pas à un résultat d'expérience et qui m'entraîne pas de contradiction sur de tels énoncés, la contradiction est moins grave, on serait plutôt conduit à retrancher cet énoncé de la théorie en se fixant une règle spéciale de raisonnement pour éviter cette contradiction qui est purement formelle. Dans les théories dont nous aurons à nous occuper un tel cas ne serait pas a priori impossible, car aux éléments directement liés aux résultats expérimentaux, on adjoint par commodité des éléments abstraits. Mais la non-contradiction d'une théorie est toujours très difficile à démontrer. Ce n'est que pour quelques théories deductives que l'on a pu établir que leur système d'axiomes était non-contradictoire, par exemple pour l'algèbre des propositions⁽¹⁾. Pour l'arithmétique et la géo-

(1) Voir à ce sujet la thèse de J. HERBRAND (Paris, 1930).

métrie, qui sont des théories admises par tous, on n'a pas encore pu démontrer qu'elles n'étaient pas contradictoires et „il résulte des toutes dernières recherches méthodologiques, que la preuve précise de la non-contradiction présente des difficultés essentielles“⁽¹⁾. Ainsi, pour des raisons de démonstration effective impossible à réaliser à l'heure actuelle, on doit renoncer à imposer à une théorie déductive d'être non-contradictoire, puisqu'en général on ne sait pas reconnaître si elle est ou non contradictoire. Cependant, par suite de l'importance de cette condition pour constituer des théories deductives adéquates comme parties de la physique théorique, il nous est nécessaire d'avoir une notion pratique remplaçant la non-contradiction. On irait en effet à rebours de l'esprit des théories deductives si l'on convenait d'une façon générale de modifier les règles du raisonnement en mettant des limitations particulières chaque fois qu'une contradiction apparaîtrait, car on se trouverait devant le jugement à prononcer dans chaque cas particulier; or la méthode déductive a pour but justement d'éliminer les jugements particuliers pour les remplacer par un petit nombre de règles générales. Cependant cette méthode est un „grand moyen“ qu'il ne faut pas s'interdire d'employer le cas échéant, comme le voudraient les classiques pour lesquels les règles de raisonnement de L_0 sont sacro-saintes et toute altération de ces règles est sophistique: il nous arrivera plusieurs fois d'y avoir recours, car pour nous les règles de raisonnement n'ont, comme nous l'avons déjà dit plus haut à la suite de M. Gonseth, qu'une valeur d'une schématisation adéquate dans un certain domaine. Dans une théorie physique, un certain nombre d'énoncés doivent nécessairement figurer dans la théorie. Il peut se faire, et ce cas se présente effectivement (par exemple pour les mesures simultanées), que ces propositions impliquent contradiction si on prend pour logique la logique classique L_0 . Il est nécessaire alors de modifier les règles de raisonnement. Si l'on admet de procéder à cette modification dans certains cas, la non-contradiction perd le caractère absolu qu'elle avait dans les théories classiques, mais elle conserve cependant une certaine importance qui toutefois n'est pas fondamentale.

La notion pratique remplaçant la non-contradiction est celle de „système d'axiomes consistant“⁽²⁾. Soit un système d'axiomes

⁽¹⁾ TARSKI *loc. cit.* p. 100.

⁽²⁾ Le terme *consistant* se trouve déjà utilisé dans ce sens par B. DE KERÉKJÁRTÓ, communication au IX^e Congrès int. de Philosophie (Congrès Descartes) Paris 1937. fasc. VI. p. 166 (No. 535 des Actualités Scientifiques).

dont nous ne savons pas démontrer la non-contradiction (ou la contradiction), si nous pouvons démontrer que ce système d'axiomes est non-contradictoire à la condition qu'une autre théorie soit non-contradictoire, nous avons fait un pas dans la démonstration de la non-contradiction en ramenant notre problème de non-contradiction à un problème de non-contradiction concernant une autre théorie. Si l'on a pu démontrer la non-contradiction de cette autre théorie la non-contradiction de notre système d'axiomes est établie; en général cette non-contradiction ne sera pas démontrée, cependant ce pourra être une théorie acceptée et utilisée par un grand nombre de mathématiciens, comme l'arithmétique, l'analyse, la géométrie, la théorie des ensembles. Du fait que ces théories sont acceptées, l'autre théorie devra l'être aussi. La non-contradiction de ces théories, comme l'arithmétique ou l'analyse n'a pas pour un idéoniste l'importance qu'elle revêt pour un classique. Si l'on prouvait que l'arithmétique est contradictoire, nous penserions qu'il conviendrait de changer des règles de raisonnement, de remplacer la logique L_0 par une autre défendant certains raisonnements, et qu'il ne faut pas rejeter l'arithmétique; si au contraire on parvient à prouver la non-contradiction de l'arithmétique, ce résultat n'aura pour nous d'autre valeur que de prouver que la logique L_0 est adéquate pour l'arithmétique; ce changement de position vient du fait que nous n'attribuons aucune vertu particulière à la logique classique L_0 .

Ces remarques faites, nous dirons qu'une théorie déductive est „consistante“ ou qu'un système d'axiomes est consistant si la non-contradiction d'une autre théorie déjà acceptée, mais dont la non-contradiction n'a pas encore été prouvée, entraîne la non-contradiction de la théorie ou du système d'axiomes que nous considérons.

Comment établirons nous cette consistance? La consistance d'une théorie Th_1 sera prouvée s'il existe une théorie Th_2 déjà admise telle que „ Th_2 non-contradictoire“ entraîne „ Th_1 non-contradictoire“. Or le mot „entraîne“ suppose un choix de règles de raisonnement. Nous admettrons que, si nous pouvons établir entre Th_1 et Th_2 une correspondance que nous allons préciser, la consistance est établie: Cette correspondance sera telle que:

1°) Dans Th_2 il existe n termes (primitifs ou définis) que l'on peut faire correspondre biunivoquement aux n termes primitifs de Th_1 .

2°) Les règles de définition dans Th_1 et Th_2 sont telles qu'à tout terme défini de Th_1 on peut faire correspondre un terme de

Th_2 avec respect de la forme des fonctions définissantes.

3°) Dans Th_2 il existe k propositions vraies (axiomes ou théorèmes) que l'on peut faire correspondre biunivoquement aux k axiomes de Th_1 .

4°) Les règles de raisonnement dans Th_1 et Th_2 sont telles qu'à toute proposition de Th_1 conséquence des axiomes correspond une proposition de Th_2 qui est une conséquence des propositions associées aux axiomes de Th_1 .

En somme on fait correspondre d'une certaine manière à Th_1 une partie de Th_2 ; à la correspondance satisfaisant aux conditions énoncées nous donnerons le nom *d'application de Th_1 sur une partie de Th_2* .

Par exemple on prouve la consistance de la thermodynamique en l'appliquant sur la théorie des différentielles totales qui forme une partie de l'analyse classique. De même au chapitre précédent nous avons démontré la consistance de la logique L_1 en l'appliquant sur L_0 .

L'application d'une théorie sur une partie d'une autre permet une classification des théories déductives de la même manière qu'une homéomorphie d'un espace abstrait sur une partie d'un autre espace permet de classer les espaces abstraits au moyen de la notion de type de dimension de M. Fréchet⁽¹⁾.

Si une théorie Th_1 est applicable sur une partie de Th_2 et Th_2 sur une partie de Th_1 , il y a correspondance biunivoque entre les termes (définis ou primitifs sans préciser) de Th_1 et de Th_2 . A une proposition vraie de Th_1 correspond biunivoquement une proposition vraie de Th_2 . A toute démonstration de la première théorie correspond une démonstration de la seconde et réciproquement. Deux théories applicables l'une sur l'autre sont en somme identiques quant à leur étude en tant que théories déductives, puisqu'à tout élément de l'une correspond biunivoquement un élément de l'autre de même type, avec conservation du signe $\rightarrow$.

Pour toutes les théories déductives que nous aurons à faire figurer dans un édifice de physique théorique, nous aurons à nous occuper de la consistance de cette théorie et nous ne l'accepterons que si cette consistance est établie par rapport à une théorie déjà admise.

Il est bien évident que si une théorie Th_1 est appliquée sur une théorie Th_2 , ce que nous avons admis nous suffira pour établir

⁽¹⁾ M. FRÉCHET. *Comptes Rendus* t. 148 (1909) p. 1152. *Math. Ann.* 1909 B. 68 p. 145. *Les Espaces abstraits* p. 30 (Gauthier Villars. Paris, 1928).

la consistance de Th_1 ; si la non-contradiction de Th_2 est prouvée il s'ensuit que la non-contradiction de Th_1 est aussi établie, mais si au contraire on prouve la contradiction de Th_2 celle de Th_1 n'est pas prouvée pour autant: il faut encore que la contradiction apparaisse dans la partie associée à Th_1 .

Bien d'autres conditions peuvent être imposées à une théorie déductive ou à un système d'axiomes, mais, comme nous ne les supposerons pas remplies, nous n'avons qu'à les signaler. La plus importante de celles-ci est la condition pour une théorie d'être *complète*; une théorie déductive est complète si au moins l'une de deux propositions contradictoires formulées uniquement avec des termes de cette théorie et des théories antérieures peut être démontrée dans cette théorie. Si des théories comme l'arithmétique ou la géométrie ne sont pas complètes (on a même pu établir qu'il ne peut exister une théorie non-contradictoire et complète dont les lois comporteraient toutes les propositions vraies de l'arithmétique ou de la géométrie), les théories deductives de la physique nouvelle sont essentiellement incomplètes. Des propositions de ces théories ne peuvent être démontrées ni fausses ni vraies (au sens donné au chapitre précédent aux mots „vrai“ et „faux“), parfois on peut démontrer qu'elles sont probables, mais il est aussi possible qu'on ne puisse rien préciser sur elles.

Une autre condition qui présente de l'intérêt est celle pour un système d'axiomes d'être *catégorique*, c'est à dire que deux réalisations quelconques de la théorie sont nécessairement isomorphes, ce qui signifie que leurs éléments seront en correspondance biunivoque avec conservation de toutes les relations. Pour plus de précision, un système d'axiomes *non-catégorique* relativement à un ensemble de règles de définition et de démonstration est un système tel qu'on peut lui adjoindre ou bien l'un ou bien l'autre de deux axiomes au moins p_0 et q_0 de façon que les deux théories construites sur les deux systèmes complétés soient non-isomorphes et non-contradictaires, les règles de définition et de raisonnement étant celles de la théorie construite sur le système d'axiomes donné. L'isomorphie est prise ici dans le sens un peu spécial d'une correspondance biunivoque entre les termes correctement définis et entre les propositions vraies avec conservation de toutes les relations, la correspondance se réduisant à l'identité dans la partie commune aux deux théories.

Un système d'axiomes *catégorique* sera un système qui n'est pas non-catégorique. La catégoricité est liée aux règles adoptées et n'est pas une propriété intrinsèque d'un système d'axiomes. Par

exemple les axiomes de Hilbert de la géométrie élémentaire constituent un système catégorique, tandis que si l'on en retire un axiome, par exemple celui des parallèles, on n'a plus un système catégorique, car alors la géométrie de Lobatchewski en est une réalisation aussi bien que la géométrie d'Euclide et il n'y a pas isomorphie entre les deux systèmes, la correspondance étant établie entre éléments du même nom. Un autre exemple est celui de la théorie des espaces abstraits, par exemple les espaces (V): la théorie n'est pas catégorique car deux espaces (V) peuvent ne pas être isomorphes et être bien différents: l'un peut être fini et l'autre infini. En général les théories déductives que nous rencontrerons en physique nouvelle ne sont pas catégoriques.

On peut considérer bien d'autres conditions pour des théories déductives; nous ne les mentionnerons pas, car elles n'interviennent pas dans les théories déductives liées à la physique théorique.

En somme nous n'avons qu'une condition indispensable, la consistance, à défaut de la non-contradiction, en outre il est préférable que les termes primitifs et les axiomes soient indépendants et réduits à leur nombre minimum. Ces conditions ne dépendent pas seulement des termes primitifs et des axiomes, mais, d'une façon aussi essentielle, des règles de raisonnement et de définition. Si l'on se fixe ces règles pour satisfaire aux conditions imposées il faut choisir les termes primitifs et les axiomes d'une façon convenable; si au contraire on se fixe ceux-ci les règles devront être choisies de façon convenable pour que les conditions soient satisfaites. En général on se fixe certaines règles, certains termes primitifs et certains axiomes et on les complète de façon que les conditions imposées, comme la consistance, soient satisfaites, par exemple on se fixe toujours les règles de raisonnement exprimées par les axiomes 1 à 4 de ce chapitre.

6. *Conditions nécessaires à une théorie déductive.* De cette étude sur les conditions à imposer nécessairement à une théorie déductive, nous voyons qu'une seule condition est nécessaire, celle de consistance, qui tient lieu pratiquement de la condition de non-contradiction. Nous devons toujours avoir présent à l'esprit qu'une théorie déductive est une schématisation adéquate dans un certain domaine mais qui ne saurait prétendre être universelle. Or, comme nous l'avons indiqué plus haut, une théorie contradictoire ne saurait constituer un schéma adéquat d'où la nécessité de la non-contradiction, mais comme celle-ci ne peut en général être prouvée on la remplace par la condition de consistance qui est suffisante,

car on choisit comme théorie Th_2 par rapport à laquelle on établit la consistance d'une théorie Th_1 , une théorie admise qui jusqu'à maintenant ne s'est pas révélée contradictoire, et qui si elle se révélait telle serait conservée en convenant de faire disparaître la contradiction au moyen d'une modification particulière appropriée des règles de raisonnement. C'est la possibilité de modifier suivant les besoins les règles de définition ou de raisonnement d'une théorie déductive qui constitue un des caractères essentiels de la doctrine que nous développons, et qui nous permet de nous contenter de la consistance lorsque nous ne pouvons pas établir la non-contradiction. Ceci n'empêche qu'il sera toujours préférable de parvenir à une démonstration de non-contradiction.

Un arbitraire très grand s'introduit pour décider quelles sont les théories deductives qu'on admet comme pouvant servir de référence pour établir la consistance d'une théorie déductive. En pratique nous admettrons toute théorie mathématique qui soit admise par un nombre suffisant de mathématiciens; en fait ce seront l'arithmétique, l'analyse, la théorie des ensembles, ou des théories qui sont consistantes par rapport à celles-ci comme les géométries, ou les mécaniques abstraites.

En dehors de la condition de consistance nous n'avons que les conditions d'indépendance sur les termes primitifs et sur les axiomes, mais ces conditions n'ont qu'un effet simplificateur non indispensable, de même que la réduction des termes primitifs à leur nombre minimum.

La consistance ainsi que les autres conditions dépendent à la fois des règles de raisonnement, des règles de définition, des axiomes, des termes primitifs, sans ne dépendre que d'un de ces éléments. C'est une erreur de croire que les règles de définition ou de raisonnement nous sont imposées d'avance sous une forme très stricte; dans cette affirmation nous nous élevons évidemment contre les prétentions des classiques; les applications des idées que nous exposons ici à la physique théorique justifient notre point de vue. Cependant nous avons un intérêt évident à adopter les règles classiques, c'est à dire la logique classique L_0 utilisée dans les raisonnements habituels de mathématiques, car nous profitons aussitôt de l'aide que nous apportent les mathématiques existantes. Ce n'est que lorsque ce schéma classique est inadéquat que nous devons nécessairement changer nos règles de raisonnement, qui seront, comme nous l'avons indiqué plus haut, des affaiblissements des règles classiques. Nous rencontrerons ce cas fréquemment en physique nouvelle.

CHAPITRE V.

LA SYNTHÈSE INDUCTIVE

1. *La méthode déductive et la physique*. Au second chapitre nous avons déclaré que toute théorie physique achevée avait la forme d'une théorie déductive, ce qui nous a conduit à étudier les caractères principaux des théories deductives. Nous sommes arrivé à cette conclusion que nous avions intérêt, chaque fois que cela serait possible, à constituer une science ou une partie d'une science sous forme d'une théorie déductive; à cette forme nous gagnons, en effet, que les énoncés de la science considérée sont rangés dans un ordre ramifié. La connaissance de certains énoncés (axiomes) et de règles de définition et de raisonnement ainsi que de certains termes dits primitifs permet de retrouver tous les énoncés que l'on a voulu prendre en considération, en même temps que l'on peut en avoir de nouveaux.

Ayant donc intérêt à mettre la théorie que nous considérons sous forme déductive, il nous faut examiner de quelle façon nous devons procéder pour y parvenir. Nous avons les termes primitifs, les règles de définition et de raisonnement; ce sont les éléments de ces quatre types qu'il nous faut mettre en évidence, puis il conviendra ultérieurement de démontrer que la théorie déductive bâtie sur ces éléments satisfait bien à l'ensemble de conditions qu'on s'est fixé pour ces théories, par exemple consistance, indépendance, etc. Ceci nous trace le plan de ce chapitre: d'abord étude des moyens pour parvenir aux éléments primitifs, puis choix des règles; la vérification que les conditions générales sont satisfaites étant du domaine des théories deductives proprement dites, nous n'en parlerons pas ici.

2. *Termes primitifs et concepts*. Les mots „termes primitifs“ ont pour nous maintenant un sens bien défini: ce sont les termes que nous plaçons au début d'une théorie déductive. Ils n'ont rien

de plus, et lorsque nous employons ces mots nous ne nous occupons pas de l'origine de ces termes primitifs ni de leur signification; ils correspondent uniquement à une préoccupation formelle, à une classification.

Mais dans toute théorie physique un sens est attaché à tous les termes qu'on y emploie, soit qu'on leur fasse correspondre des éléments ayant une signification physique, c'est à dire des éléments liés à des résultats d'expérience, ou à des faisceaux d'expériences, soit qu'on les considère comme des éléments abstraits adjoints et prolongeant un ensemble d'éléments ayant une signification physique, ou au contraire correspondant à de tels éléments. Mais dans une théorie physique les termes primitifs ne sont pas des abstraits adjoints, il ne suffit donc pas de les classer en types, il faut les considérer avec leur signification physique. Aussi pour les distinguer des termes primitifs purement formels, ou plutôt considérés comme tels, nous les appellerons les *concepts*.

Comme l'a longuement montré M. Gonseth et comme nous l'avons déjà dit plus haut, le sens des concepts n'est nullement déterminé et fixé; la signification d'un concept demeure toujours ouverte et en devenir; il représente un stade provisoire de schématisation et d'abstraction, issu d'un concret qui en apparaît comme des réalisations et tourné vers un abstrait toujours en formation. Il est impossible de faire une théorie dont les concepts ne gardent un contenu intuitif et une marque du concret dont ils sont issus et il est également impossible de faire une théorie dont les éléments ne soient pas déjà schématisés et qui ne portent pas les marques de l'abstraction.

Comment pouvons nous, dans une schématisation, nous arranger pour qu'elle subsiste le plus longtemps possible malgré le sens en suspens des concepts? Pour cela il faut que nous laissions le sens des concepts le plus ouvert possible dans la théorie que nous construisons. Dès lors nous devons schématiser au maximum et préciser les propriétés de ces concepts que nous utiliserons: ceci nous conduit à la formalisation, c'est à dire au premier stade, au point de départ de la théorie déductive. Ainsi nous retrouvons à nouveau l'intérêt de la formalisation.

Comment allons-nous parvenir à ces concepts? Telle est la question qui se pose maintenant. Ce que nous venons de dire nous met sur la voie: les concepts seront issus du concret par schématisation et abstraction. Qui dit schématisation dit en même temps simplification, mais dit aussi connaissance sommaire et imparfaite.

L'analyse de M. Gonseth fait bien ressortir ce caractère sommaire et incomplet de toute connaissance; ce que nous obtenons n'est pas une telle connaissance sur une réalité préformée que nous découvrons peu à peu, mais cette réalité nous la construisons mentalement à l'aide des notions déjà formées qui, par des contacts constants, vont s'affiner progressivement. M. Edouard Le Roy a longuement insisté sur ce point de vue et il nous suffit de renvoyer le lecteur à ses intéressants travaux.

Ce caractère sommaire et incomplet qui paraît le côté négatif de la connaissance scientifique a pour complémentaire un caractère simplificateur, qui est le côté positif de cette connaissance.

Nous ne retirons donc d'une réalité mouvante que des traits essentiels et nous ne parviendrons qu'à un schéma analogue, comme nous l'avons dit plus haut, à une carte géographique; sur cette carte nous ne pouvons pas mettre tous les caractères du pays représenté mais seulement quelques uns d'entre eux qui nous ont paru simples et intéressants. D'ailleurs ces caractères ne sont pas extraits d'une réalité préformée dans sa totalité; la plupart de ceux que nous faisons figurer sur cette carte n'existent que parce qu'ils correspondent à une connaissance schématique existant avant que la construction de la carte ne fût entreprise.

Notre schéma ne conservant que certains caractères de la réalité sensible, d'ailleurs considérablement élaborés, est par cela même abstrait. Un effort d'abstraction est à la base de toute théorie, comme nous l'avons déjà indiqué au chapitre II. Nous ajoutons: une schématisation introduit des simplifications. Seule une notion très schématisée peut être une notion simple. Le travail essentiel dans l'élaboration d'une théorie sera de dégager des notions simples, des notions abstraites, et de concevoir les lois qui devront les régir. L'énoncé axiomatique est le terme de cette étude. Une fois qu'on y est parvenu la théorie est constituée, il ne reste plus qu'à la développer en tant que théorie déductive. De ce travail la plus grande part disparaît sans laisser de traces sur le papier.

Bien des physiciens feraient remarquer que l'axiomatisation n'apparaît que tardivement dans le développement d'une théorie physique qu'elle n'a qu'un intérêt esthétique dont on ne se préoccupe qu'une fois connues toutes les conséquences de la théorie considérée; par suite ces physiciens ne lui attribuent que le rôle d'améliorer l'exposition de la théorie. Ceci vient de la confusion entre une axiomatique achevée et construite suivant toutes les rè-

gles de l'art et une axiomatique en construction. Tout progrès d'une théorie physique inachevée vient d'une amélioration de son axiomatique. Par exemple le rôle des ondes de Louis de Broglie ne s'est éclairci que par l'énoncé des principes des interférences et de décomposition spectrale; or de tels énoncés traduisent un progrès dans l'axiomatisation.

3. *Difficultés de dégager des idées simples.* Nous devons maintenant examiner comment nous pouvons parvenir à dégager les notions simples qui vont nous servir de termes primitifs dans les théories déductives partielles associées aux théories physiques.

Il faudrait être peu au courant du développement de la science pour ignorer l'extrême difficulté que l'on éprouve pour parvenir à des notions simples qui soient bien adaptées aux utilisations que l'on veut en faire et qui contiennent d'une façon potentielle tous les caractères que l'on veut leur voir posséder, sans en contenir d'étrangers. C'est dans les mathématiques modernes que ces difficultés se rencontrent surtout. Il nous suffit de citer toutes celles qu'on a eu à vaincre pour parvenir à la définition d'une courbe, de la dimension d'un espace, de l'intégrale, etc. En physique nouvelle on rencontre les mêmes difficultés, car on a aussi à définir des notions très générales comme un système physique, un espace physique, une fonction d'ondes, etc.

On peut dire qu'il n'y a pas de procédé pour parvenir à des notions simples, si ce n'est une longue analyse suivie de nombreux tâtonnements. Comme sans notions simples il n'y a pas de théorie possible on comprend pourquoi les progrès des théories physiques sont si lents, et pourquoi on conserve si longtemps des théories que l'on sait trop imparfaites, car on ne voit pas apparaître une idée simple permettant de les améliorer. Nous devons faire remarquer ici que la notion de simplicité est en grande partie subjective; d'après ce que nous avons dit plus haut une notion nous apparaît simple parce que nous la prenons comme terme d'une schématisation, d'une abstraction „simplicité condensée, diamant du charbon“. „La simplicité n'a pas besoin d'être simple, mais du complexe resserré et synthétisé⁽¹⁾“ la simplicité ne nous apparaît donc qu'après une analyse conduite dans une certaine direction et c'est dans la direction choisie que s'introduit le plus l'élément subjectif⁽²⁾.

(1) Alfred JARRY. *Les Minutes de Sable mémorial* p. 8 (Fasquelle Ed. Paris 1932, d'après l'éd. originale).

(2) Voir à ce sujet G. BACHELARD, *Le nouvel esprit scientifique* chap. VI. Il s'y trouve une critique de cet esprit cartésien qui voudrait qu'on pût facilement dégager des notions qui fussent *simples en soi* objectivement, indépendamment de toute direction de l'enquête subjective.

Une opinion très répandue est que des résultats expérimentaux suffisent pour pouvoir édifier une théorie. Rien n'est plus erroné; sans résultats d'expérience l'édification d'une théorie ne se pose même pas, mais tant qu'on n'a pas pu dégager d'idée simple le matériel expérimental demeure inutilisable. Il suffit pour s'en convaincre de citer l'exemple des spectres optiques demeurés si longtemps sans aucune explication alors que la mesure de leurs longueurs d'ondes étaient les mesures les plus précises de toute la physique. Sitôt une idée simple aperçue la schématisation commence; c'est le début de l'axiomatique et par suite de la théorie.

La difficulté dans le maniement des notions simples et générales est de bien délimiter leur domaine et leurs propriétés, car souvent on étend, dans une généralisation, de façon imprévisible le domaine de validité de la notion considérée et l'on peut être conduit à des contradictions. Il faut donc prendre des précautions dans les raisonnements abstraits si l'on veut qu'ils possèdent une valeur qui ne soit pas illusoire.

Avec quelques idées simples on constitue un schéma général qui prépare la suite du développement. Plus le schéma dégagé est sommaire, plus la liberté est grande de le préciser par l'introduction de nouvelles notions, qu'on a ensuite la possibilité de modifier pour parvenir à une précision dans un autre sens, ce qui permet alors de faire un progrès. Cette méthode est utilisée constamment. La théorie dans laquelle les notions sont le plus dégagées de limitations du domaine concret est la théorie des ensembles; viennent ensuite la théorie des Espaces abstraits et l'analyse générale de M. Fréchet. Or dans la façon dont nous envisageons les théories physiques nous cherchons à avoir un petit nombre de notions simples très schématisées et abstraites, il est alors naturel de penser que ces théories mathématiques seront constamment utilisées pour l'édification des théories physiques nouvelles et en formeront l'armature. Cette tendance à l'abstraction que l'on rencontre déjà, mais à un degré moindre, en Mécanique ondulatoire, et qui provoque l'hostilité des physiciens classiques, n'est pas artificielle; elle est nécessitée par la nature même des questions générales qui constituent l'objet de ces théories nouvelles. En effet l'étude des procédés de schématisation montre que plus une connaissance est générale, plus elle a eu besoin d'être schématisée, donc plus elle est abstraite.

4. *Nécessité d'une étude préliminaire aux énoncés axiomatiques.* Il nous faut maintenant aborder le point essentiel de cette étude: la forme que doit prendre une théorie physique. Nous avons vu au chapitre II qu'une théorie physique devait se mettre sous forme d'une théorie déductive; une telle théorie comprend donc un énoncé axiomatique, puis le développement de la théorie déductive, que nous appellerons la „partie déductive de la théorie considérée“. Nous venons d'indiquer que la presque totalité du travail préliminaire à l'axiomatique disparaissait une fois la théorie édiflée, travail qui consiste à dégager des notions simples et les lois qui les régissent. Le terme en est l'énoncé des concepts et des postulats. Certains auteurs ont prétendu qu'une théorie physique devait consister uniquement en cet énoncé axiomatique et en ses conséquences établies à la manière des théories deductives, accompagné au besoin par des récits d'expériences conduisant à la vérification de la théorie. C'est ainsi qu'on tend à procéder dans un certain nombre d'ouvrages de mécanique rationnelle ou d'optique géométrique, imitant en cela les exposés de géométrie. Nous considérons que cette façon d'envisager les théories physiques est défectueuse. On ne peut considérer la forme abstraite et axiomatique qu'Hilbert a donnée à la géométrie dans les *Grundlagen der Geometrie* comme une théorie des propriétés géométriques des corps physiques, tandis que c'est cet aspect que prennent les exposés élémentaires à l'usage des tout jeunes élèves. Ce n'est que progressivement qu'ils peuvent parvenir aux degrés supérieurs de l'abstraction, tout en sachant reconnaître dans les exposés plus intuitifs des réalisations de cet abstrait. C'est cette faculté d'abstraction progressive qui constitue un des buts de l'enseignement mathématique⁽¹⁾.

Ainsi on ne peut d'emblée se placer dans une théorie ayant une forme axiomatique abstraite tout en donnant un contenu aux symboles: ou bien on n'y verra qu'un jeu abstrait, ou bien il faut passer par l'intermédiaire d'abstractions progressives.

C'est justement par un tel travail d'abstractions progressives que se dégagent les notions simples; celui-ci disparaît si l'on se borne à un énoncé axiomatique, mais par là même on perd la possibilité de donner une signification physique aux concepts et aux symboles de cette théorie, ou encore le lecteur refusera de considérer comme simples et intuitives les notions introduites par voie de concepts, comme évidentes les lois introduites comme pos-

⁽¹⁾ Cf. G. BACHELARD. *La formation de l'Esprit Scientifique*, discours préliminaire (sous presse).

culats; autrement dit il refusera toute confiance à la théorie jusqu'à ce qu'il ait fait à son tour le travail d'abstraction progressive de l'auteur de la théorie. Commencer un ouvrage de physique par l'énoncé axiomatique, c'est écrire un ouvrage dont il manque le premier volume et dont on demande à la sagacité du lecteur une reconstitution sous peine de ne pas comprendre dans sa totalité le texte qu'il a sous les yeux. Ainsi aux deux parties que nous avons déjà distinguées dans une théorie physique: énoncé axiomatique et partie déductive, doit être adjointe une partie préliminaire qui justifie l'axiomatique adoptée.

Précisons sur un exemple la nécessité de cette partie préliminaire. Soit un traité de thermodynamique qui partirait sans explications préliminaires d'un énoncé axiomatique. En agissant ainsi l'auteur réclamerait la confiance du lecteur en lui disant qu'il se convaincra à posteriori de la validité des principes lorsqu'il aura suffisamment de fois vérifié la validité de leurs conséquences. Cette marche à l'aveuglette avec des retours en arrière pour comprendre les principes serait foncièrement mauvaise; c'est pourquoi dans tout traité de thermodynamique l'énoncé des principes est précédé d'explications préliminaires, de même que dans tout ouvrage exposant une partie quelconque de la physique.

La méthode d'exposition qui débiterait par un énoncé axiomatique demande au lecteur que, tout en poursuivant sa lecture, il se livre au difficile travail de redécouvrir par lui-même les idées simples qui ne sont apparues que très lentement à l'auteur. Cette mauvaise conception de la physique théorique vient d'une imitation mal à propos des théories mathématiques classiques basées sur l'idée d'une existence complètement autonome des abstraits géométriques, (idée que l'idonéisme a montrée insoutenable); dans cette conception on considère que la méthode mathématique formelle est la méthode idéale de toute science et que rien ne doit subsister en dehors d'elle lorsque la science a atteint son état final qui est le „rationnel“. Mais ce savoir rationnel voulait exprimer des certitudes absolues, or le développement de la science a montré qu'il n'y avait pas de certitudes absolues, mais des vérités pratiquement assurées dans un certain domaine. Par exemple le principe de Carnot n'est certain qu'à l'échelle macroscopique, il n'est vrai qu'en moyenne; la thermodynamique perd alors son caractère de vérité absolue pour prendre celui de vérité d'ordre pratique. Dès lors il n'est pas recommandable de la présenter sous une forme analogue à la géométrie de Hilbert; il existe bien une théorie formelle associée à la thermodynamique, qui est isomorphe

à une partie de la théorie des différentielles totales, mais lorsque le mot „thermodynamique“ est employé, ce n'est pas à celle-ci qu'on pense, mais à la théorie dans laquelle les concepts ont un contenu. Or ce contenu ne peut apparaître que tardivement après les efforts nécessaires si on présente la théorie sous la forme d'une théorie déductive commençant par un énoncé axiomatique. Ce que nous venons d'indiquer comme exemple doit être dit pour toute théorie physique.

Bref, nous pensons qu'en traitant une théorie physique uniquement comme une théorie déductive formelle on commet une erreur, car on demande au lecteur un effort qu'il ne peut pas toujours faire pour en avoir une vue exacte. Ceci vient du fait que les concepts et postulats d'une théorie physique ne s'imposent pas d'emblée et ne peuvent paraître naturels et acceptables qu'après une longue étude préliminaire permettant d'atteindre un état d'esprit tel que les notions dégagées paraissent simples, bien adaptées, et pour tout dire acceptables comme termes primitifs dans une axiomatique.

Autrefois, cet état d'esprit n'était pas si difficile à acquérir, car on restait beaucoup plus dans le domaine de l'intuitif et on ne s'élevait pas jusqu'à des schématisations aussi générales. Il était alors inutile de dégager des notions très simples et très schématiques, des hypothèses figuratives suffisaient et celles-ci s'acquièrent beaucoup plus facilement. Mais comme cette méthode a fait faillite lorsqu'on a voulu l'appliquer loin de notre échelle, dans le très grand ou dans l'atomique, force a été de s'élever à des notions plus schématiques, donc à des notions plus malaisées à discerner dans la complexité du réel. Aussi est-il fort important désormais de faciliter le plus possible l'assimilation des idées schématiques.

5. *Les trois parties d'une théorie physique.* Nous sommes donc parvenu à ce point qu'une axiomatisation est une partie essentielle d'une théorie physique et qu'on ne peut pas en commencer brutalement l'exposé par l'énoncé de ses concepts et de ses postulats pour ensuite la développer à la manière d'une théorie déductive. Cet énoncé doit être précédé de raisonnements ayant pour but de faire saisir la signification et le caractère simple et naturel des notions qu'on dégage progressivement et de donner un caractère de vraisemblance à l'axiomatique adoptée, faute de quoi le lecteur est en droit de refuser de suivre les vues de l'auteur concernant la schématisation adoptée. Une théorie physique n'est donc

pas uniquement une théorie déductive; si elle possède ce caractère en certaines de ses parties, elle doit avant tout contenir une partie non déductive précédant l'énoncé axiomatique. Cette classification d'une théorie physique en trois parties totalement distinctes: préliminaires, énoncé axiomatique, théorie déductive, est trop sommaire. Ces trois parties doivent être effectivement distinguées, mais elles sont fortement imbriquées les unes dans les autres et se recouvrent. Ceci provient du fait que les concepts et postulats ne sont pas tous énoncés simultanément, mais progressivement au fur et à mesure des besoins et au fur et à mesure que les notions fondamentales se dégagent. Par exemple en géométrie élémentaire, le postulat d'Euclide est énoncé assez longtemps après les premiers axiomes. Il en est de même dans toutes les théories physiques. Une partie qui est déductive par rapport aux premiers axiomes apparaît au contraire comme préliminaire par rapport aux concepts et postulats qui seront introduits par la suite. Nous dirons même plus: la partie déductive qui offre vraiment de l'importance au point de vue théorique est celle qui peut être considérée comme appartenant par un certain côté aux préliminaires. La partie essentielle d'une théorie physique est donc cette partie préliminaire qui a son terme dans l'énoncé axiomatique. La partie déductive qui n'appartient pas à des préliminaires peut offrir un grand intérêt pour la vérification expérimentale de la théorie ou pour les applications, elle est pourtant d'une faible importance pour la théorie considérée en elle-même.

Si la partie essentielle d'une théorie physique est la partie préliminaire aux énoncés axiomatiques, il nous faut examiner quelle forme elle doit posséder. C'est là un problème complexe, cette forme étant beaucoup moins facile à mettre en évidence que la forme de la partie déductive. Celle-ci se caractérise par le raisonnement déductif: comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, on admet certaines lois de raisonnement et une base axiomatique, la partie déductive est constituée par tous les énoncés obtenus à partir des postulats par les règles de raisonnement admises.

6. *Rôle des théories deductives partielles.* Puisque dans une théorie physique tous les concepts et postulats ne sont pas introduits en même temps, avec les premiers on peut constituer une théorie déductive. Une partie de celle-ci peut conduire à introduire de nouveaux concepts ou de nouveaux postulats. Ainsi en admettant tous les concepts et postulats de la géométrie élémentaire sauf le

postulat d'Euclide, on peut constituer une théorie déductive. C'est celle-ci qui à un certain moment suggère d'introduire un nouveau postulat, soit celui d'Euclide, soit celui de Lobatchewsky, soit celui de Riemann. Mais de la sorte on n'a jamais qu'une suggestion, et non une obligation, comme c'est le cas pour un théorème d'une théorie déductive. Le plus qu'on puisse avoir, c'est de se trouver dans la nécessité de faire un choix si l'on veut aller plus loin, comme c'est le cas dans l'exemple que nous venons de citer. Ce cas se présente assez souvent au cours de l'édification d'une théorie déjà assez avancée pour que le choix puisse s'exprimer dans le langage de la théorie déductive déjà édifiée, c'est à dire qu'il suffira d'admettre un nouveau postulat sans introduire de nouveaux concepts.

Les lignes qui précèdent nous montrent le rôle important joué par les théories deductives partielles dans l'édification d'une théorie physique. Certaines d'entre elles, ou du moins certains de leurs éléments rentrent donc dans la partie préliminaire que nous avons notée comme fondamentale d'une théorie physique. Mais elles n'en constituent pas l'essentiel, elles se bornent à nous aiguiller dans notre choix. Dans certains cas les possibilités de choix s'expriment d'une façon suffisamment nette et délimitée pour que ce choix puisse être décidé par un appel à l'expérience, mais c'est là le cas le plus simple.

En général il faudra introduire des idées simples sans pouvoir faire appel à des expériences précises, et c'est là que se manifeste la plus grande difficulté dans l'élaboration d'une théorie physique, car il n'y a pas de méthode qui réussisse toujours, tandis que si un progrès est lié à une théorie déductive déterminée, on doit, en principe, y parvenir, car on est alors guidé par les règles de raisonnement dont on a fait choix. Dans ce cas les notions simples et schématiques seront obtenues par intuition à partir d'un faisceau plus ou moins indistinct d'expériences, car, comme l'a indiqué M. Arnold Reymond⁽¹⁾, une intuition est un faisceau de résultats d'expériences plus ou moins confus joint à un acte synthétique de réflexion, de pensée.

7. *L'aide de la méthode historico-critique.* Il faut parvenir à saisir des concepts extraits d'une réalité complexe constituée en partie au moyen de conceptions plus anciennes, concepts qui sont schématiques et simplificateurs. Mais la notion du simple et de

(¹) A. REYMOND. Discussion orale de sa communication au IX^e Congrès Int. de Philosophie (Congrès Descartes, Paris 1937).

L'adéquat est en grande partie subjective et il s'agit pour celui qui a édifié la théorie de faire partager à ses lecteurs de telles notions. C'est pourquoi certains auteurs ont pensé qu'il n'y avait pas d'autre moyen digne de figurer dans la science que d'énoncer une axiomatique, de demander au lecteur de lui faire confiance, d'apprendre la théorie, et de la juger à posteriori, suivant ses résultats. Cette attitude n'est possible que si l'énoncé de l'axiomatique peut se faire tout entier en peu de pages, c'est à dire si la théorie physique se présente rapidement comme une théorie déductive, et surtout si rapidement elle peut faire ses preuves pour emporter l'adhésion du lecteur; c'est le cas, par exemple, de la mécanique classique; et pourtant bien des professeurs de Mécanique ont estimé cette façon d'opérer trop incomplète et ont jugé bon de faire précéder l'énoncé des principes de remarques destinées à les justifier: il suffit à ce sujet de citer le Cours de Mécanique de Painlevé⁽¹⁾. Dans une théorie où les concepts et postulats ne sont introduits que progressivement et surtout si cette théorie est très générale et très schématique si bien que ce n'est que tardivement qu'elle pourra faire ses preuves, il est indispensable que dès l'énoncé des concepts et postulats le lecteur accepte de les considérer comme adéquats et même y mette une certaine conviction. Or il est bien évident qu'en général leur énoncé ne suffit pas pour entraîner cette adhésion indispensable. Jusqu'à maintenant nous n'avons trouvé comme moyen que celui de l'appel à l'expérience dans le cas où celui-ci est possible, cas qui ne peut se présenter que tardivement, lorsqu'une bonne partie de la théorie est déjà formulée. Que faut-il faire alors dans les autres cas? Evidemment tout moyen qui permettra de saisir un concept ou la vraisemblance d'un postulat sera bon. Bien d'auteurs ont pensé qu'il n'y avait d'acceptable que la méthode historico-critique.

M. Brunschvicg en a admirablement fait ressortir l'importance dans l'avant-propos de son ouvrage *L'Expérience humaine et la causalité physique*⁽²⁾:

„Les notions initiales auxquelles on fait supporter aujourd'hui le poids des théories physiques, ce ne sont plus, ou des idées assez simples pour se définir avec un privilège d'évidence en termes qui eux-mêmes seraient clairs et distincts, ou des faits assez près de l'intuition naïve pour se présenter encore comme objets de représentation et de réalisation immédiate; ce sont des formules où ex-

(¹) P. PAINLEVÉ. *Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique*. (Hermann. éd. Paris) et *Les Axiomes de la Mécanique* (Gauthier-Villars Paris).

(²) BRUNSCHVIEG: *L'expérience humaine et la causalité physique* p. X.

pression abstraite et signification concrète sont relatives l'une à l'autre et solidaires, cette relativité, cette solidarité n'étant pas susceptibles d'être justifiées ou même éclaircies sinon par le retour à la poussée successive des générations qui ont dessiné, comme font les vagues sur le littoral, la structure tortueuse et subtile de la science actuelle".

Nous avons donc par une étude historique un moyen de parvenir à la justification d'une axiomatique applicable dans un certain nombre de cas. Cependant une telle étude sera en général fort longue, car le plus souvent on a fait bien des détours avant de saisir une notion simple et pour le but pratique et limité que nous avons en vue dans de nombreux cas on pourra sauter un certain nombre de tentatives, utiliser une voie plus courte qui n'est apparue qu'à postériori, de façon à aboutir le plus directement possible. A ce moment on s'aperçoit que cette voie la plus directe est souvent fort éloignée de la voie historique. Ainsi la méthode historique est une méthode sûre, mais il peut en exister une plus directe obtenue en ne respectant pas scrupuleusement l'ordre historique.

Cette méthode nous permet, pour une certaine théorie, d'abord de distinguer entre notions nouvelles, notions modifiées et notions inchangées. Elle revient à juger une théorie par rapport à celles qui l'ont précédée. Donc elle nous permet d'entraîner la conviction d'un lecteur averti des théories plus anciennes pour les notions qui ne sont pas modifiées ou pour celles qui le sont peu. Du fait que lors d'une modification on peut étendre beaucoup plus qu'on ne le croit au premier abord le domaine de validité d'une notion, ce lecteur peut accepter des modifications plus importantes qu'il croit devoir accorder, si bien que cette méthode nous donne d'une façon assurée un certain nombre de justifications. Elle nous permet en outre de faire accepter la nécessité de modifications importantes en faisant ressortir les inconvénients d'une schématisation antérieure.

8. *Les raisonnements d'analogie.* Si la méthode historique nous permet d'apercevoir la nécessité de modifications, elle ne nous indique pas lesquelles ni comment nous y prendre pour parvenir à une nouvelle schématisation. Une méthode qui a rendu de grands services dans l'élaboration des théories physiques est celle des raisonnements par analogies.

Ces analogies, d'ailleurs, sont suggérées par la méthode histo-

rique: tel procédé de raisonnement ayant autrefois permis la résolution d'un certain problème qui présente des analogies avec la question étudiée est utilisé à nouveau en subissant des modifications convenables. Cependant il est plus difficile de faire partager la valeur d'une schématisation introduite uniquement par un raisonnement d'analogies, car, si parfois on obtient une schématisation adéquate, dans de nombreux autres cas la schématisation obtenue se révèle inadéquate. Par exemple nombreux sont les physiciens qui n'ont accepté l'hypothèse géniale de Louis de Broglie d'une Mécanique ondulatoire qu'après la découverte du phénomène de la diffraction des électrons par les cristaux; à ceux-ci l'analogie existant entre l'optique géométrique et la mécanique classique ne semblait pas suffisante pour justifier l'hypothèse d'une analogie plus complète, qui pourtant était justifiée par un certain nombre de raisons théoriques. Cette peine à faire accepter par les physiciens des théories basées uniquement sur des raisonnements d'analogies est due au fait que dans un certain nombre de cas les raisonnements d'analogies nous fourvoient complètement, tel est par exemple le cas de la théorie quantique des champs (sous sa forme primitive) construite par analogie avec la mécanique ondulatoire.

Ainsi par comparaison avec les théories déjà constituées, on peut faire admettre les notions que l'on conserve inchangées et celles qui ne sont que peu modifiées; en outre on peut faire admettre la nécessité de certains changements plus importants.

Un lecteur admettra, s'il n'a pas de préjugés classiques, le rejet d'un postulat ou son remplacement par un moins strict; par exemple s'il admet la géométrie euclidienne, il admettra également la géométrie obtenue en rejetant le postulat d'Euclide, qu'il considérera comme une géométrie incomplète, mais on ne pourra pas facilement lui faire remplacer ce postulat par un autre. Cependant, grâce aux théories partielles on peut faire accepter des modifications qui dès l'abord seraient refusées.

9. *L'introduction des notions nouvelles.* Par ces comparaisons avec des théories antérieures nous ne pouvons ni introduire de notions nouvelles ni même faire saisir une modification qui ne s'exprime pas dans le langage de l'ancienne théorie. Devant la nouveauté nous nous trouvons dépourvus de méthode; on peut même dire qu'il n'en existe pas, car on aurait par cela même le secret du progrès de la physique théorique.

Cependant une théorie n'apparaît pas à son auteur sous sa forme théorique achevée, mais progressivement; ayant une idée nouvelle, il améliore la schématisation, et peu à peu améliore sa formalisation, et par suite son axiomatique. Il peut donc toujours traduire en mots l'évolution de ses idées et la façon de raisonner qui l'a conduit à sa théorie formalisée. En faisant un tel exposé des raisons qui l'ont amené à sa nouvelle théorie il peut grandement faciliter l'adhésion du lecteur à sa façon de voir. Mais ces raisons sont purement subjectives et ne convaincront pas forcément le lecteur. Ainsi l'auteur d'une théorie nouvelle peut par des explications espérer entraîner l'adhésion de ses lecteurs, mais il ne peut être jamais certain de convaincre. C'est en grande partie une question de sentiment qui décide un lecteur à approuver une théorie nouvelle.

10. *La synthèse inductive.* Tous les paragraphes de ce chapitre nous ont fait sentir la nécessité de faire précéder les énoncés des concepts et des postulats d'une partie préliminaire essentielle destinée à enlever l'acquiescement du lecteur, en lui permettant de saisir intuitivement l'idée générale de la théorie considérée ainsi que la signification de ses concepts et le caractère naturel des lois exprimées par les postulats. Cette partie préliminaire d'une théorie physique ne peut être exprimée totalement en formules comme le sont les deux autres parties que nous avons distinguées dans une théorie physique: énoncé axiomatique et théorie déductive. Cette première partie est par nécessité hétérogène, comprenant des morceaux de théories deductives, des comparaisons avec des théories antérieures, des explications plus ou moins formalisées faisant appel à l'intuition. Son unité ne vient que du but à atteindre: faire accepter une axiomatique, c'est à dire faire accepter une théorie. C'est la partie essentielle, à notre avis, d'une théorie physique. Amputée de cette partie, la théorie n'apparaîtrait plus que comme un jeu de symboles abstraits, sans lien avec la réalité. Pour lui donner un sens il faut refaire le travail préliminaire, soit sous sa forme primitive, soit sous une autre forme. A cette partie si importante et hétérogène dans sa forme, dont le résultat sera l'édification définitive de la théorie et dont les raisonnements sont toujours aventurés, nous donnerons le nom de *synthèse inductive*. Synthèse, car son but est d'englober dans un même schéma des connaissances disparates; inductive, car elle conclut du particulier au général, du partiel au complété, du concret à l'abstrait, du certain à du moins certain, de l'assuré au conjectural.

Ainsi il y a trois étapes dans l'édification d'une théorie physique, trois étapes aussi dans l'exposé de cette théorie qui résument le cheminement de la pensée de son auteur, trois étapes enfin en chacun de ses chapitres (chacun étant défini par l'introduction de nouvelles notions): une synthèse inductive, un énoncé axiomatique, une théorie déductive.

11. *Conditions sur les énoncés axiomatiques.* La seconde partie d'une théorie physique, l'énoncé axiomatique, constitue la frontière entre la synthèse inductive et la partie déductive: tout ce qui précède un énoncé axiomatique appartient à la synthèse inductive qui a son terme dans l'énoncé considéré. Tout ce qui suit l'énoncé axiomatique, qui en découle en n'employant que les règles du raisonnement, constitue la partie déductive; elle a son point de départ dans l'énoncé axiomatique. Son rôle de partie frontière, terme pour l'une, origine pour l'autre, lui confère un caractère spécial. D'abord comme elle ne consiste qu'en énoncés de concepts et de postulats elle est beaucoup plus concise que les deux autres parties.

Du fait que cette seconde partie constitue l'axiomatique d'une théorie déductive, elle est soumise à certaines conditions, celles auxquelles on soumet l'axiomatique de toute théorie déductive, et que nous avons examinées au chapitre précédent.

Quelles sont maintenant les conditions imposées à un système axiomatique par le fait d'être le terme d'une synthèse inductive? D'abord deux systèmes équivalents qui sont également acceptables du seul point de vue des théories deductives, excepté dans le cas où l'un comprend un nombre moindre de termes primitifs, ne le seront plus maintenant, car l'un peut être plus facilement accepté comme terme d'une synthèse inductive. C'est ainsi que de deux systèmes équivalents, n'ayant pas le même nombre d'éléments primitifs on pourra préférer celui qui en aura le plus grand nombre s'il est plus aisément le terme d'une synthèse inductive, tandis que les préoccupations deductives seules feraient préférer dans tous les cas le système ayant le nombre le plus petit de termes primitifs. De même entre un système indépendant d'axiomes et un système complètement indépendant on pourra préférer le système non-complètement indépendant alors que du point de vue deductif seul on aurait tendance à préférer toujours le système complètement indépendant.

Ainsi entre des conditions d'origine déductive et des conditions

dues à la synthèse inductive, ce sont à ces dernières que nous devons en premier lieu satisfaire, la condition de consistance que nous avons vu plus haut être indispensable étant naturellement satisfaite en premier lieu.

La condition d'indépendance s'accorde avec les conditions de la synthèse inductive et même est fondamentale, car elle revient à dire qu'on ne devra pas introduire de concepts ni de postulats en nombre surabondant; naturellement si la preuve de l'indépendance ne peut être acquise nous conserverons l'axiomatique adoptée, mais sitôt une non-indépendance remarquée nous devons la corriger. En effet moins nous aurons de notions à introduire, plus la tâche de la synthèse inductive sera facilitée et allégée. En somme ce que nous impose la condition pour une axiomatique d'être le terme d'une synthèse inductive, c'est l'indépendance des concepts et des postulats ou, tout au moins dans le cas où l'indépendance ne peut être prouvée, leur non-dépendance, c'est à dire qu'on ne peut démontrer qu'un concept est définissable au moyen des autres, qu'un postulat est conséquence des autres, en outre elle nous conduit à faire un certain choix entre des systèmes équivalents de concepts et de postulats: on construit un système que l'on juge préférable aux autres qui lui sont équivalents (au sens défini dans le chapitre précédent).

12. *Esthétique et théorie physique.* Dans cet ouvrage nous avons cherché à mettre en évidence des caractères généraux que présentent les théories physiques, c'est ainsi que nous avons été conduit à distinguer trois parties dans une telle théorie: synthèse inductive, énoncé axiomatique, partie déductive; que dans chacune de ces parties nous avons dégagé des caractères essentiels et des conditions qui devaient être satisfaites. Mais il y a un élément fort important pour une théorie physique dont nous ne nous sommes pas encore préoccupé, c'est l'élément esthétique. M. Louis de Broglie⁽¹⁾ en a fait ressortir toute l'importance. Il s'exprime en ces termes: „c'est un fait curieux, mais indéniable, que ce sentiment sert souvent de guide dans l'élaboration des théories de la philosophie naturelle. Une doctrine qui parvient d'un seul coup à réaliser une vaste synthèse en montrant l'analogie profonde de phénomènes en apparence étrangers les uns aux autres produit incontestablement sur l'esprit du théoricien une impression de

(¹) LOUIS de BROGLIE: Conférence à la Semaine de synthèse publiée dans la Revue „Science“, No. 14, juin 1937.

beauté et l'incline à croire qu'elle renferme une grande part de vérité...

„Il y aurait ici matière à de nombreuses comparaisons avec les œuvres d'art au sens ordinaire du mot. Ce qui fait la beauté d'une œuvre d'art, ce n'est pas la simplicité de ses parties, c'est plutôt une sorte d'harmonie globale qui donne à l'ensemble un aspect d'unité et d'homogénéité malgré la complication parfois très grande des détails... Les monuments du style gothique ou du style arabe, par exemple, si on examine les finesses de leur structure, présentent souvent une extrême complexité, mais de leur ensemble se dégage une impression d'unité organisée qui fait apparaître l'œuvre entière avec ses innombrables aspects locaux comme un tout solidaire et indivisible, comme une sorte de condensation sous forme matérielle d'un seul élan de la pensée. La beauté des théories scientifiques nous paraît essentiellement de la même nature: elle s'impose quand, dominant sans cesse les raisonnements et les calculs, se retrouve partout une même idée centrale qui unifie et vivifie tout le corps de la doctrine.“

M. Louis de Broglie se pose la question suivante: „Comment peut-il alors se faire que la beauté ou l'élégance d'une théorie soit souvent un signe de leur valeur et de leur exactitude?“

Puis il ajoute: „Il me paraît en effet certain que le travail du théoricien est très souvent orienté et guidé par le sentiment esthétique dont nous parlons... nous avons une certaine tendance instinctive à admettre qu'une théorie dont la beauté nous frappe a des chances d'être vraie et il semble que bien souvent cette intuition ne soit pas trompeuse“.

Nous ne chercherons pas à donner une réponse complète à la question de M. Louis de Broglie, car elle soulève un très important problème philosophique qui dépasse le domaine de la Philosophie des Sciences que la Physique théorique moderne oblige à considérer sous un aspect entièrement nouveau, nous voulons dire le problème de l'accord de la nature et de notre sentiment esthétique. Il convient cependant que nous fassions à son propos quelques remarques qui rentrent dans le cadre de cet ouvrage.

Dans ce qui précède nous avons toujours parlé de schématisation adéquate et, comme nous n'avons imposé qu'un petit nombre de conditions pour cette schématisation, nous jouissons d'une certaine liberté dans notre construction dont nous profitons pour satisfaire nos tendances qui sont toujours liées à une certaine esthétique. De même qu'un architecte doué du moindre tempérament ar-

tistique mettra à profit la latitude qu'on lui laisse pour introduire une certaine harmonie dans son édifice, un théoricien profitera de la liberté dont il dispose pour satisfaire ses tendances esthétiques. Il y trouvera d'ailleurs son avantage, car toute harmonie ressentie par le lecteur facilitera grandement son adhésion.

Ainsi que nous l'avons déjà répété, une théorie est une schématisation d'une réalité non pas préformée, mais construite en partie par nous. Comme nous n'imposons à ce schéma qu'un nombre restreint de conditions, nous disposons d'une double liberté due, d'une part, à l'indétermination du schéma qui subsiste une fois les conditions générales satisfaites, d'autre part à la latitude que nous avons dans la construction de la réalité. Cette latitude a été longuement analysée notamment par M. Edouard Le Roy⁽¹⁾ et par M. Eddington⁽²⁾. Ce dernier a écrit: „L'esprit, grâce à sa sélection, a encadré les phénomènes de la nature dans un système de lois d'un modèle où son choix a la plus large part: dans la découverte de ce système, on peut considérer l'esprit comme récupérant sur la nature ce qu'il y a mis“. Ainsi nous disposons d'une liberté qui nous permet d'introduire une certaine harmonie de manière qu'une théorie apparaisse en un certain sens comme une symphonie.

Citons un exemple précis où une condition d'ordre esthétique s'est manifestée: au chapitre III, p. 49, nous avons cherché si, dans la logique L_1 , il était possible de définir une opération $\oplus$ jouant le rôle d'une addition. Cette opération ne joue pas un rôle essentiel dans L_1 ; son intérêt était surtout de chercher à introduire dans L_1 l'harmonie de la théorie des anneaux. De telles préoccupations se font jour continuellement en Physique théorique.

Une autre raison qui introduit automatiquement une certaine beauté est l'appui fourni par les mathématiques à une théorie physique. Bien des auteurs ont insisté sur la beauté des mathématiques, sur „l'harmonie des nombres“. Cette harmonie, nous la retrouvons intacte dans les théories physiques.

Cependant la liberté dont nous disposons est limitée: nous ne pouvons pas introduire arbitrairement les caractères d'ordre esthétique. D'autre part, l'harmonie mathématique à elle seule ne saurait suffire, car la théorie physique dépasse les mathématiques. Le

(¹) Edouard LE ROY. *Revue de Métaph. et de Morale* t. XLII (1935) p. 151 p. 319. *Revue philosophique* t. 62 (1937) p. 10, 195.

(²) A. S. EDDINGTON. *La Nature du Monde physique* (trad. fse G. Cros, Payot éd. Paris 1929) p. 247.

caractère d'unité et de beauté que présente une théorie physique provient avant tout de l'unité de pensée et de conception qui a présidé à la construction de l'édifice: la théorie est en grande partie telle que nous voulons qu'elle soit et nous la voulons belle. Or aucune des conditions qui nous sont imposées ne nous interdit d'y mettre de la beauté et de l'élégance, au contraire les matériaux que nous avons amassés viennent y contribuer. L'idée centrale sur laquelle s'appuie toute la théorie s'introduit dans les diverses parties suivant des raisons d'ordre esthétique sitôt que nous disposons d'une certaine liberté d'action. La synthèse inductive de même que les énoncés axiomatiques et la partie déductive sont édifiés en tenant compte de ce sentiment naturel, si bien que nous ne devons nullement nous étonner si une théorie adéquate possède une certaine harmonie. Les règles de raisonnement elles-mêmes peuvent être choisies en partie pour des raisons d'ordre esthétique.

Si ces préoccupations fixent en grande partie l'arbitraire dont nous disposons, elles ne le fixent pas tout entier. La raison de commodité vient alors achever la détermination, raison sur laquelle Henri Poincaré a suffisamment insisté pour qu'il nous suffise de la mentionner.

Telles sont les conditions générales qui nous semblent présider à l'édification d'une théorie physique. Les autres sont d'ordre proprement physique: nous allons les rencontrer dans le chapitre suivant qui terminera cette étude.

CHAPITRE VI.

ETUDE DE QUELQUES CARACTERES FONDAMENTAUX DES THEORIES PHYSIQUES

1. *La Réalité physique.* Bien qu'il soit difficile de définir en quelques mots la réalité physique, nous pouvons cependant en dégager certains caractères. Cette réalité est assez différente de la réalité concrète de tous les jours. Elle porte en effet la marque qu'elle a été dans une grande partie construite par l'esprit; elle contient par suite des éléments que l'on peut qualifier d'abstraits.

Nous serions assez tenté d'appeler „réalité physique“ uniquement les résultats de mesure avec en outre les propriétés qualitatives des appareils de mesure. Une telle réalité est loin d'être immédiate et d'être une donnée primitive; elle n'apparaît au contraire qu'après une longue évolution mentale. Ces résultats de mesure ne peuvent prendre une signification qu'une fois édifiée une théorie dans laquelle ils s'incorporent et l'appareil de mesure lui-même ne se comprend qu'au moyen d'une théorie. Dans un travail déjà cité, M. Edouard Le Roy⁽¹⁾ a longuement insisté sur la façon dont se constitue ce type de réalité et nous n'y insisterons pas davantage.

Les résultats de mesure sont rapportés à un „système physique“, constitué d'éléments dont l'ensemble constitue l'univers et dont nous supposons la possibilité d'en découper une partie: la notion de découpage est à la base de celle de système physique. L'atomisme apparaît lorsqu'on suppose que le morcellement d'un système physique ne peut être poursuivi indéfiniment, mais au contraire est fini et déterminé. Ce n'est donc qu'après de longs détours que l'on parvient à une notion schématisée de „système physique“ et la réalité d'un tel système est une réalité idéaliste. Avant de pouvoir utiliser comme point de départ la notion de système physique une longue synthèse inductive est nécessaire. On voit

⁽¹⁾ EDOUARD LE ROY. *Revue de Méta. et Morale* t. XLII (1935) No. 2 pp. 151 et No. 3 p. 319.

donc qu'il y a des différences assez nettes entre la réalité des mesures et la réalité des systèmes physiques ou des corpuscules atomiques.

Quant aux appareils de mesure on n'utilise en physique théorique que certains de leurs caractères qualitatifs d'où on tire des relations structurales qui fixent en grande partie la forme de la théorie. Ces caractères qualitatifs sont considérés, eux aussi, comme exprimant une certaine réalité, réalité qui n'apparaît pas immédiatement et qui exige une synthèse inductive avant de pouvoir parvenir à une schématisation utilisable en théorie. Faisons remarquer que ce rôle que nous faisons jouer aux appareils de mesure pour influencer la forme de la théorie ne serait pas admis à priori par la plupart des physiciens, cette idée n'est à notre connaissance utilisée que par M. Jean Mariani⁽¹⁾ dans sa théorie de la subjectivité et surtout par nous même dans notre ouvrage sur les principes fondamentaux de la physique théorique⁽²⁾.

Pour conclure nous voyons que toute réalité telle qu'elle apparaît en physique est médiate, qu'elle n'a de sens qu'au sein d'une théorie, et qu'il y a pluralité des réalités: il y en a de différents⁽³⁾ types, celle des mesures diffère en partie de celle d'un système ou d'un corpuscule comme de celle des propriétés des appareils de mesure. Réalité et théorie physique sont liés comme un objet et son moule, mais on ne peut distinguer quel est le moule et quel est l'objet, réalité et théorie ont chacun des aspects du moule et de l'objet moulé.

2. *Le rôle théorique des observateurs.* Si l'on fait jouer un rôle fondamental aux résultats de mesure, on doit rapporter la mesure à un observateur, et un résultat de mesure dépend de l'observateur: une mesure effectuée avec des appareils de même type par deux observateurs différeront. Si ceux-ci ne sont pas au même endroit leurs mesures de position sur un même système faites à des instants correspondants ne seront pas identiques; de même s'ils sont en mouvement l'un par rapport à l'autre leurs résultats de mesure de grandeurs cinétiques comporteront des différences.

(1) JEAN MARIANI: *Les limites des Notions d'objet et d'objectivité.* (Préface de M. Leon Brillouin) fasc. VII de la Série d'Exposés de Philosophie des Sciences publiés sous la direction de M. Abel Rey; No. 519 des Actualités Scientifiques, Hermann Paris 1937).

(2) Jean Louis DESTOUCHES: *Principes fondamentaux de Physique théorique* (Hermann éd. 1938 sous presse).

(3) Cf. L. CHWISTEK: *La pluralité des réalités.*

La notion d'observateur se schématise donc et devient une des notions fondamentales de la théorie.

Une théorie physique peut être considérée comme ayant pour but de permettre de faire des prévisions concernant des mesures à effectuer ultérieurement par un observateur, à partir de certains résultats de mesure. Deux parties apparaissent alors suivant qu'on considère un seul observateur ou qu'on en considère un ensemble. Dans le premier cas ce sera une théorie de la *physique du solitaire*, dans l'autre ce sera une théorie d'une *physique collective*, son caractère dépendra de l'ensemble d'observateurs considéré. Par exemple on obtiendra la physique de la Relativité restreinte en considérant comme ensemble d'observateurs un ensemble tel qu'ils soient tous en mouvement relatif uniforme l'un par rapport à l'autre et tels qu'ils échangent entre eux des signaux. C'est le principe que nous avons appelé „principe des signaux“ (d'après lequel un observateur peut utiliser les résultats expérimentaux d'un observateur qui lui sont transmis par signaux comme ses propres résultats pour faire des prévisions non seulement pour ses propres mesures ultérieures, mais aussi pour celles qu'effectueront les autres observateurs), qui permet de passer de la physique du solitaire à une physique collective. Ce principe est donc fort important. En outre, joint au principe de relativité qui fixe l'ensemble des observateurs pour lesquels les lois sont les mêmes, il détermine en partie la forme des lois d'évolution.

Il nous paraît donc essentiel de faire intervenir explicitement des observateurs schématisés dans les théories physiques. On peut par certains détours ne jamais prononcer le mot d'observateur dans une théorie, mais en agissant ainsi on a une construction artificielle que rien ne justifie, tandis que la théorie basée sur les principes que nous avons énoncés se présente sous une forme naturelle qui possède un caractère d'évidence suffisant pour être acceptée; l'autre manière qui tient à paraître objective ne se justifie que par une position réaliste d'un monde extérieur totalement objectif tel que nos moyens d'en prendre connaissance ne l'altèrent pas et peuvent être laissés de côté. La conception dont nous venons d'indiquer les grandes lignes au contraire donne un rôle prépondérant à la manière dont nous prenons connaissance du monde physique, et les caractères „en soi“ de ce monde extérieur s'évanouissent; les lois fonctionnelles sont dues en partie aux propriétés des instruments qui nous servent à pénétrer dans ce monde extérieur. Dans sa conception en étroit voisinage avec la notre, M. Jean Mariani⁽¹⁾ a pro-

(1) voir Note (1) page précédente.

posé de distinguer cette nouvelle manière d'envisager la physique par le terme de „Théorie de la subjectivité“, terme qui correspond bien à la conception dont nous venons de donner l'idée générale. Cependant notre théorie et celle de M. Mariani qui présentent des principes généraux communs se sont développées dans des directions tout à fait différentes: tandis que cet auteur construit d'abord une théorie macroscopique, nous nous plaçons d'emblée dans l'atomisme. Bien que leur raccord doive se faire sans aucun doute pour former une théorie qui les englobe toutes deux, en vertu de notre théorème d'unité de la Physique théorique, pour l'instant elles sont totalement distinctes. Pour des raisons qui apparaîtront dans les paragraphes suivants, nous adopterons pour notre théorie le terme de „Physique structurale“. Nous n'entrerons pas ici dans les détails techniques de cette construction théorique, renvoyant le lecteur à notre ouvrage. *Principes fondamentaux de Physique théorique* qui constitue la suite naturelle à ce travail et nous nous bornerons à en indiquer les caractères essentiels.

3. *La méthode d'adjonction.* De ce que nous avons dit plus haut concernant la réalité physique il résulte que les éléments d'une théorie physique, si on tient à rester en étroit contact avec la réalité, ne devront être que 1°. des nombres exprimant le résultat d'expériences, 2°. les probabilités concernant les valeurs que l'on trouvera en effectuant diverses mesures, 3°. les types de mesure, les ensembles de valeurs possibles pour les résultats de mesure, les propriétés qualitatives schématisées des appareils de mesure. Nous ne saurions dire si une telle théorie serait désirable, mais elle se trouverait très difficile à édifier, car elle ne comprendrait pas d'éléments généraux et ne se prêterait pas aux méthodes mathématiques habituelles; cependant on peut s'apercevoir, en étudiant la question de plus près, qu'on pourrait la construire entièrement en n'utilisant que les mathématiques intuitionnistes.

Une méthode qui nous paraît beaucoup plus commode est celle de permettre, chaque fois que cela sera utile, d'adjoindre des éléments abstraits aux éléments liés à la réalité physique. C'est la méthode que nous avons toujours suivie; elle permet d'obtenir des résultats très généraux et d'une belle ordonnance qui satisfont pleinement aux exigences esthétiques.

Cette adjonction se fait de deux manières: d'abord par adjonction d'éléments à une classe d'éléments physiques pour faire un domaine de causalité au sens de M. Bouligand⁽¹⁾ et per-

⁽¹⁾ G. BOULIGAND: *La causalité des théories mathématiques*. Actualités Scientifiques (1936).

mettre d'utiliser ainsi les raisonnements de la théorie des groupes, d'où une aide considérable dans les raisonnements de la théorie physique. C'est ainsi qu'on est amené à adjoindre aux types de mesure des types de „mesures virtuelles“ de façon à compléter l'ensemble de ces types. D'autre part au moyen de correspondances univoques ou multivoques on fait correspondre à des éléments physiques des éléments abstraits. Par exemple c'est au moyen de telles correspondances qu'on introduit des „éléments de prévision“ qu'on identifie ensuite aux fonctions d'ondes de la Mécanique ondulatoire. Les fonctions d'ondes ont donc un caractère abstrait et ne sont pas considérées comme ayant une existence physique. C'est systématiquement que sont introduits des éléments abstraits par ces deux manières dans les théories physiques: cette méthode fait partie des moyens que nous utilisons pour construire nos schémas adéquats, mais ces schémas sont tels que les éléments auxquels on attache un certain caractère de réalité physique sont liés par des éléments qui en sont dépourvus: en raccourci le réel est lié au réel par des intermédiaires dépourvus de réalité.

Ce n'est qu'une conception réaliste avec intelligibilité complète du monde extérieur qui exigerait l'emploi uniquement d'éléments ayant une réalité physique. Au contraire dans une conception idéaliste ou dans une conception idéaliste cette exigence disparaît et l'emploi des abstraits adjoints apparaît comme naturel et bien adapté. Ceci vient de ce que la réalité n'y est pas donnée toute faite à priori, mais est construite peu à peu et les différences entre la réalité physique et la réalité abstraite ne sont pas nettement tranchées et dépendent de la théorie construite. Ce n'est qu'à travers une théorie physique que l'on distingue entre réalité physique et réalité abstraite, car elles n'ont en soi aucune dissemblance. C'est leur rôle qui crée toute la différence.

4. *Influence des appareils de mesure sur la forme d'une théorie physique.* Au paragraphe 2 de ce chapitre nous avons insisté sur le caractère imposé à notre théorie par le rôle essentiel qu'y jouent des observateurs effectuant des mesures. Suivant qu'on considère un seul observateur ou un ensemble d'observateurs, on a soit la Physique du solitaire, soit une Physique collective. Ceci précisé, nous devons examiner quels caractères fondamentaux ces mesures impriment à la théorie. Tous les appareils sont à notre échelle, en outre les résultats qu'ils fournissent sont à classer en différents types suivant le genre d'appareil qui a servi à la mesure:

ces types sont les grandeurs physiques. Du fait qu'un appareil est à notre échelle, il suit que les lois classiques et les mesures qu'on peut effectuer avec lui sur un système à notre échelle ou à une autre s'interprètent nécessairement dans le langage de la Mécanique et de la Physique classiques. Tout résultat de mesure obtenu avec un appareil quelle que soit l'échelle du système observé: système à l'échelle humaine, système microscopique, système astronomique, sera classé comme un résultat de mesure de la grandeur définie dans le langage classique. Ceci fait comprendre pourquoi les résultats de mesure seront toujours classés suivant les différents types que constituent les grandeurs de la Physique classique comme la position, la vitesse, l'énergie, la quantité de mouvement, etc., quelle que soit l'échelle du système observé, d'où l'intervention des grandeurs de la Physique classique dans toutes les théories s'étendant au delà du domaine moyen que constituent les phénomènes à notre échelle.

Mais l'intervention des grandeurs de la Physique classique par le fait des appareils de mesure n'implique pas que les lois régissant les mesures soient les mêmes ni que les résultats des mesures des divers types, c'est à dire des diverses grandeurs, soient liés par les lois classiques: c'est justement là que les diverses théories physiques vont différer. Retenons que l'emploi des appareils qui sont à notre échelle a pour conséquence que tout résultat de mesure effectuée sur un système physique quelconque se classe dans un certain type qui est une grandeur de la Physique classique, sans impliquer quoique ce soit en plus.

5. *Mesures simultanées.* Selon les théories classiques on peut à tout instant manier simultanément plusieurs appareils de mesure et se livrer à la mesure simultanée de tout couple de grandeurs. La possibilité de cette simultanéité apparaît donc évidente à un physicien classique, aussi lui faut il faire un effort considérable pour envisager l'impossibilité de certaines mesures.

Si l'on examine de plus près comment on peut effectuer une mesure de position ou de quantité de mouvement sur un corpuscule, on s'aperçoit que ces deux mesures ne peuvent être effectuées simultanément: tout procédé améliorant la détermination de la position augmente l'imprécision sur la quantité de mouvement et réciproquement, suivant la relation bien connue de Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{h}{4\pi}$$

où Δx désigne l'incertitude sur la valeur de la coordonnée x et Δp_x l'incertitude sur la composante x de la quantité de mouvement, h est la constante de Planck. Ce résultat s'établit⁽¹⁾ en acceptant la Mécanique de la relativité restreinte et l'ancienne théorie des quanta. Ces théories sont à assimiler aux théories classiques et une meilleure ne doit pas se trouver en contradiction avec celle-ci quant aux résultats concernant les mesures. C'est parce que l'appareil est macroscopique que les lois de la théorie ancienne s'appliquent, d'où la nécessité d'en tenir compte dans toute théorie microscopique; on doit accepter comme une loi expérimentale qu'en physique microscopique toutes les mesures simultanées ne sont pas possibles. Pour faire saisir ce résultat nous allons revenir à une image d'Eddington⁽²⁾ que nous arrangerons à notre manière. Alors que nous pouvons interroger directement un homme dans la rue, il ne nous est pas possible de le faire pour un pensionnaire d'un collège. Un intermédiaire nous est ici nécessaire. Ce sera par exemple le concierge qui nous fera des confidences sur divers sujets, ou bien l'économe qui nous parlera uniquement argent. Mais nous ne pourrions interroger ces deux personnages en même temps. L'un ne parlera qu'en l'absence de l'autre. Il en est de même pour nos appareils de mesure: ils ne nous donneront pas de renseignements simultanés si nous considérons des appareils mesurant des grandeurs incompatibles.

L'origine des grandeurs incompatibles réside en ce fait que les phénomènes atomiques exprimés dans le langage des théories classiques se présentent tantôt sous l'aspect corpusculaire et tantôt sous l'aspect ondulatoire (ce qui se traduit à l'approximation de l'optique géométrique par l'équation de Louis de Broglie:

$$S = h\varphi$$

dans laquelle S est la fonction de Jacobi du système considéré et φ la phase de l'onde associée). En effet les notions d'onde et de corpuscule sont contradictoires: les phénomènes prévus par une théorie corpusculaire sont différents de ceux prévus par une théorie ondulatoire. La théorie des quanta ne devra donc conserver que certains caractères de ces deux théories qui devront être tels qu'ils se complètent et ne soient pas en contradiction. Les grandeurs sont à ranger en deux classes: celles de caractère corpusculaire, comme la position et celles de caractère ondulatoire comme la quantité de mouvement. Deux mesures de telles grandeurs effec-

⁽¹⁾ W. HEISENBERG: *Les bases physiques de la théorie des quanta*.

⁽²⁾ EDDINGTON: *La nature du monde physique* trad. fse Cros.

Atuées simultanément nous feraient connaître à la fois des caractères ondulatoires et des caractères corpusculaires du phénomène observé; nous en tirerions des conclusions contradictoires. Deux attitudes sont alors possibles qui caractérisent l'essentiel de cette dualité ondes-corpuscules: soit supposer que la mesure simultanée de deux grandeurs de caractères opposés qui se contredisent est impossible, soit supposer que nous ne pouvons pas utiliser le produit logique de deux énoncés de résultats de telles mesures (attitude de M^{le} Février). S'il y a adéquation de la théorie les deux attitudes sont équivalentes: la seconde est la traduction en logique de la première: ce sont deux faces complémentaires de nos moyens d'expression en physique théorique⁽¹⁾.

C'est cependant une loi curieuse que l'on ne puisse pas mesurer simultanément avec une précision aussi grande que l'on veut deux grandeurs quelconques. Nous devons accepter cette loi comme le résultat d'une analyse des procédés de mesure et des lois qui régissent les mesures. On doit en outre remarquer que c'est une idéalisation qui conduit à l'idée de mesure précise et celle-ci est liée au caractère non physique du continu. Ce serait nous entraîner trop loin que montrer comment on est amené à associer l'ensemble des nombres réels à l'ensemble des valeurs possibles pour une position ou une quantité de mouvement⁽²⁾.

6. *Prévisions et incertitudes.* Le but d'une théorie physique est de faire des prévisions à partir de certains résultats de mesure. Nous savons, en vertu des relations d'incertitude de Heisenberg, que nous ne pouvons, pour les corpuscules atomiques, avoir les conditions initiales de la Mécanique classique. Malgré ce changement nous pouvons calculer des prévisions, car des théories atomiques sont possibles. Mais elles devront évidemment s'exprimer avec un schéma différent de celui de la Mécanique classique.

Il convient alors de nous demander quelles prévisions nous pourrions faire. Aurons nous des prévisions précises, c'est à dire pourrions nous prévoir exactement les résultats des mesures que nous pourrions effectuer dans l'avenir, ou au contraire n'aurons nous que des prévisions imprécises ne donnant que les probabilités des différentes valeurs que nous pourrions trouver, la prévision pré-

(1) Voir pour plus de détails: J. L. DESTOUCHES, *Principes fondamentaux de Physique théorique*, chapitre II, § 1: Mesures simultanées.

(2) Voir J. L. DESTOUCHES: *Principes fondamentaux de Physique théorique*.

cise constituant un cas exceptionnel?

Un principe que nous avons placé à la base de la Physique du solitaire est le suivant:

Principe des prévisions certaines: Si l'on prévoit avec certitude la valeur à l'instant t_1 d'une grandeur physique A , on ne trouble pas l'évolution ultérieure du système en effectuant cette mesure.

Ce principe qui constitue un des postulats de la Physique du solitaire nous paraît essentiel tant au point de vue formel qu'au point de vue physique. C'est lui qui introduit le groupe d'évolution et qui moyennant une hypothèse de différentiabilité, conduit à l'équation différentielle fondamentale de l'évolution d'un système physique, dont la forme est:

$$\frac{\partial X}{\partial t} =)-(X$$

où $)-($ est un opérateur transformant un élément de l'espace des X en un élément de cet espace, on l'appelle *l'hamiltonien* du système observé; les X sont des éléments abstraits au moyen desquels on calcule les prévisions. L'espace abstrait constitué par ces éléments dépend de la théorie considérée, mais dans toute théorie nous avons une telle équation. C'est, en somme, l'équation universelle de la Physique.

Ce principe peut encore s'interpréter ainsi: une prévision certaine est assimilable en tous points à une mesure véritable⁽¹⁾ puisque, que l'on effectue ou non la mesure, l'évolution ultérieure sera la même, la valeur calculée est donc équivalente à la valeur mesurée.

Par adjonction de grandeurs virtuelles on peut toujours s'arranger de telle façon qu'à chaque instant il y ait au moins une grandeur physique dont le résultat soit prévu avec certitude. Considérons alors nos prévisions concernant la position et la quantité de mouvement d'un corpuscule à un instant t_1 . Si nous effectuons les mesures, elles seront nécessairement imprécises puisqu'elles doivent satisfaire au principe d'incertitude de Heisenberg. Si nous faisons une prévision meilleure que l'expérience nous permet d'atteindre, nous serions en contradiction avec le principe précédent. En effet nous aurions la prévision certaine pour une grandeur telle que la mesure n'en soit pas possible, car les relations qui la lient à la position et la quantité de mouvement utilisées en sens in-

⁽¹⁾ Nous sommes redevable à M. Gonseth de cette remarque.

verse ne permettraient pas d'en donner une valeur précise en raison des incertitudes de Heisenberg, et on aurait contradiction. Ainsi nos prévisions ne peuvent dépasser les incertitudes de Heisenberg si nous acceptons le principe des prévisions certaines. Ceci s'accorde avec les conclusions de la Mécanique classique d'après laquelle, en vertu du théorème de Liouville, l'incertitude ne peut diminuer pour les prévisions ultérieures.

D'une façon générale le principe des prévisions certaines entraîne que, s'il existe des grandeurs qui ne sont pas mesurables simultanément, les prévisions pour les différentes grandeurs ne peuvent être toutes certaines et les incertitudes de deux grandeurs non mesurables simultanément sont liées par une relation⁽¹⁾.

7. *Inadéquation de la notion d'état.* Appelons grandeur d'état d'un système physique une grandeur telle que, si l'on connaît à un instant t_1 sa valeur, on en déduit les valeurs de toutes les grandeurs attachées au système. Si une telle grandeur existe, la connaissance de sa valeur à un instant initial fournit un élément de prévision qui est le plus riche que nous puissions avoir. D'autre part, si nous pouvons prévoir exactement la valeur de la grandeur d'état à un certain instant t_1 , nous connaissons par cela même exactement les valeurs de toutes les grandeurs physiques attachées au système.

Mais nous ne devons pas oublier les conclusions du paragraphe précédent: par suite des relations d'incertitude, il nous est impossible de faire des prévisions certaines pour la grandeur d'état, à supposer qu'elle existe. En outre, nous ne pouvons pas non plus la mesurer, car nous aurions tourné les incertitudes; or l'examen des possibilités de mesure nous montrent qu'il n'existe pas un type de mesure tel qu'il élimine les incertitudes de Heisenberg. On y est amené par une critique de l'emploi des différents appareils de mesure. Autrement dit: il n'existe pas de grandeur d'état (au sens ci-dessus défini, qui est le sens classique) attachée à un système physique pour une théorie qui satisfait aux relations d'incertitudes de Heisenberg, ou plus généralement pour une théorie telle qu'on ne puisse mesurer simultanément toutes les grandeurs attachées à un système.

Les éléments de prévision, ou fonctions d'ondes, ne peuvent pas être liés à une grandeur d'état, ou plus abrégativement à un état du système observé, puisqu'une grandeur d'état ne peut exis-

(1) Pour la démonstration précise voir notre ouvrage: *Principes fondamentaux de Physique théorique* (Hermann Paris 1938).

ter. Mais un tel élément de prévision traduit le maximum de connaissances que nous pouvons acquérir sur un système. Or cet élément ne dépend pas seulement du système, mais de la mesure effectuée. Si nous mesurons à t_0 la position des éléments du système, nous aurons un élément de prévision bien différent de celui qu'on obtient en mesurant à cet instant la quantité de mouvement. Ces deux éléments, loin de se compléter, sont incompatibles, si bien qu'ils ne correspondent pas à une propriété intrinsèque du système, car il n'y aurait pas d'incompatibilité, chacun nous faisant connaître une partie de cet état intrinsèque. Les éléments de prévision dépendent donc du type de mesure effectué et ne traduisent pas une propriété intrinsèque du système observé, mais une propriété du complexe appareil-système. Par suite, aucun moyen d'une mesure, nous ne pouvons atteindre de propriété intrinsèque du système. De telles propriétés ne pourraient être atteintes que par un ensemble de mesures. Comme on connaît plusieurs types de corpuscules, les éléments caractérisant ces types peuvent être seuls assimilés provisoirement à des propriétés intrinsèques des corpuscules. Par une mesure on atteint aucune de ces propriétés: c'est cette constatation qui est énoncée sous le nom de principe de subjectivité et pris comme attitude fondamentale dans la théorie de M. Mariani ⁽¹⁾ et dans la nôtre. Ce terme de subjectivité correspond au fait qu'en physique classique les résultats de mesure sont indépendants du moyen mis en oeuvre pour les obtenir et dépendent uniquement des propriétés intrinsèques du système observé, c'est à dire que les mesures sont laissées au libre choix de l'observateur et sont en un certain sens subjectives. Au contraire, pour nous, les résultats de mesure ne dépendant pas uniquement du système observé, les propriétés intrinsèques n'apparaissent pas et sont laissées à la libre interprétation de l'observateur. Ce sont les lois des mesures qui sont les lois physiques.

8. *La Physique structurale.* Une physique dans laquelle toutes les mesures simultanées ne sont pas possibles ne peut être une physique des propriétés intrinsèques et doit se borner à être une physique de relations. La notion de propriété physique intrinsèque ne peut prendre place dans la théorie. La théorie fournira uniquement à partir de certaines mesures des prévisions pour des mesures ul-

(¹) Jean MARIANI: *Sur la signification physique des groupes de transformations*. Journ. de Physique s VII. t. III. no. 5 Mai 1932) p. 219 et *Les limites des Notions d'objet et d'objectivité*. Actualités scientifiques (1937).

érieures. Les éléments de prévision et tous les éléments qui interviennent dans la théorie satisfont à un certain nombre de relations. Entre ces éléments il y a certaines opérations de composition: par exemple des additions, des multiplications, etc. En somme, nous avons des ensembles d'éléments et des ensembles de relations. Un ensemble E d'éléments et un ensemble $\mathfrak{R}$ de relations, soit $(E, \mathfrak{R})$ peut être appelé une *structure*⁽¹⁾. Par exemple un anneau sera désigné par $(E, \{+, \cdot\})$, un espace abstrait par $(E, \{\mathfrak{F}\})$, la lettre $\mathfrak{F}$ désignant l'opération de fermeture des ensembles d'éléments de l'espace. Pour toutes les catégories d'éléments que nous rencontrerons dans la théorie physique que nous envisageons, on est conduit à de telles structures, et ce sont elles qui jouent le rôle le plus fondamental, d'où le nom de Physique *structurale* que nous donnerons à notre théorie.

9. *Principes de la Physique structurale.* Ces indications générales étant données, nous pouvons en rassembler les résultats dans l'examen des principes mis à la base de la Physique structurale qui oblige à une reconsidération de toutes les notions de la Physique.

La première partie doit consister en l'étude de la notion de système physique, l'étude des morcellements et en l'assimilation d'un système physique à un ensemble d'éléments. Les principes de l'atomisme viennent préciser que tout morcellement est fini et déterminé et qu'un système physique comprend un nombre fini d'éléments.

Puis on doit étudier les propriétés des mesures, résultat d'une mesure et type de mesure. Ensuite la notion de simultanéité doit être introduite ainsi que celle de système chronométrique qui conduisent à une certaine construction du temps⁽²⁾.

La simultanéité introduite, on peut étudier la composition des mesures, c'est à dire les lois concernant les mesures simultanées.

Puis vient la notion de prévision qui doit être introduite dans le sens large de prévision incertaine, de probabilité.

On a ainsi les éléments nécessaires pour édifier la *Physique du solitaire*. Un premier théorème fondamental permet d'associer à un système à chaque instant un élément de prévision à partir duquel, à l'instant considéré, les probabilités pour les diverses

(1) Pour la définition précise d'une structure voir KRASNER Journ. de math. 1938, 1er trimestre (sous presse): *Une généralisation de la notion de corps*.

(2) Voir: *Principes fondamentaux de Physique théorique* chapitre I.

grandeurs attachées au système seront calculées par des lois indépendantes du temps. L'étude se scinde en deux parties: éléments de prévision, ou théorie de l'évolution et calcul des probabilités des diverses grandeurs.

Une condition vient alors s'ajouter: celle de la *stabilité*. Si les résultats de mesure initiaux sont entachés de faibles erreurs expérimentales, les prévisions ne doivent être que faiblement altérées. C'est la condition que Duhem ⁽¹⁾ introduisait par le terme de „mathématiques de l'à peu près“ et qui se précise sous la forme que nous lui avons donnée de stabilité des prévisions à la suite des travaux de M. Bouligand ⁽²⁾ et des nôtres sur le caractère logique de la notion de stabilité ⁽³⁾ qui se traduit par la notion de stabilité des propositions.

Cette stabilité entraîne une certaine continuité qui permet de considérer les éléments de prévision comme appartenant à un espace abstrait. Les conditions du calcul des probabilités des valeurs des grandeurs physiques à partir des éléments de prévision viennent imposer à cet espace un certain nombre de conditions.

Le principe des prévisions certaines vient introduire une condition de groupe pour les opérateurs d'évolution (ce sont des transformations sur les éléments de prévisions). Une condition de différentiabilité introduite alors conduit à une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps pour les éléments de prévision, équation que nous avons indiquée plus haut. De la sorte on dispose des éléments essentiels de la physique du solitaire.

Pour aller plus loin, il faut introduire la notion d'espace. Au moyen de signaux un observateur peut construire progressivement un espace physique macroscopique ainsi qu'un espace-temps qui lui permettent de se faire un tableau du monde. C'est dans cet espace qu'il place d'autres observateurs, avec lesquels il échange des signaux.

Pour parvenir à la *Physique collective* il faut encore considérer un ensemble d'observateurs entre lesquels s'échangent des signaux et que ces signaux donnent lieu à des informations utilisables

⁽¹⁾ DUHEM: *La théorie Physique*; ainsi que l'étude de M. DUGAS: *Revue générale des Sciences* (1936).

⁽²⁾ G. BOULIGAND: *Bull. Acad. Roy. Sc. Belgique* t. XXI, 1935, p., 277 et 776.

⁽³⁾ J. L. DESTOUCHES: *Bull. Acad. Roy. Sc. Belgique* t. XXI. 1935, p. 708 et p. 780, t. XXII 1936, p. 525, t. XXIII 1937, p. 159, et *Comptes Rendus* t. 201 p. 482 (1935).

Suivant notre *principe des signaux* que nous avons énoncé plus haut. Il faut encore y joindre un principe exprimant pour quels observateurs les lois sont les mêmes; c'est le *principe de relativité*. Il faut également adjoindre un autre principe, celui de symétrie relativiste par exemple, pour que l'opérateur hamiltonien d'un corpuscule ait une forme déterminée. Si l'on fait intervenir des champs extérieurs un principe est encore nécessaire, le *principe du mouvement inertial* sur lequel nous n'insisterons pas ici.

Le principe des signaux est fondamental, car c'est lui qui introduit une solidarité entre les différents observateurs. Sans lui nous aurions des physiques de solitaires sans qu'il soit possible d'avoir un lien car les signaux échangés, en l'absence du principe qui donne le moyen de les utiliser, ne seraient d'aucune utilité pour calculer les prévisions. Nous aurions pour la Physique théorique un pirandellisme total: à chacun sa physique. Au contraire ces physiques, bien qu'elles contiennent de nombreux éléments subjectifs, ne sont pas totalement indépendantes et c'est le principe des signaux qui fait le lien et qui fonde ces physiques de solitaires en une physique collective. Ce principe s'explique par un prolongement et une extension de l'idée intuitive que nous pouvons accepter les résultats de mesure d'un collègue et nous en servir pour calculer des prévisions. Au fond tous les principes que nous plaçons à la base des théories physiques valables dans le domaine microscopique ou dans le domaine astronomique sont issues des notions à notre échelle, sont extraites de la vie courante: nous remarquons certaines idées simples et nous les conservons seules, faisant abstraction de leurs usuelles accompagnatrices. La difficulté pour accepter des principes de la physique nouvelle ne réside pas dans les principes acceptés, car nous les avons dans la vie courante, mais dans le fait que nous rejetons toute adjonction: celui qui peut partir sans le bagage traditionnel, qui peut accepter une notion sans celles qui l'accompagnent habituellement, celui là seul peut faire de la physique théorique moderne: il est nécessaire d'abandonner un flot de préjugés, il faut pouvoir parvenir jusqu'à un certain ascétisme mental.

10. *Les résultats de la Physique structurale.* Un physicien ne juge habituellement une théorie nouvelle qu'aux résultats qu'elle fournit. Une théorie assise sur des bases certaines et dont le développement est harmonieux ne retiendra pas son attention si elle ne fournit pas des résultats nouveaux. Bien que les idées que nous ve-

nons d'exposer soient trop récentes pour avoir fait leur preuve, indiquons qu'il semblerait que la théorie de la subjectivité de M. Jean Mariani explique le magnétisme terrestre et solaire ainsi que l'électricité terrestre et certains autres phénomènes demeurés jusqu'à maintenant hors d'atteinte des théories physiques. En outre si sa théorie se confirmait, cette explication du magnétisme terrestre fournirait la preuve expérimentale décisive de la valeur de la théorie de la Relativité généralisée d'Einstein pour laquelle les preuves directes sont assez incertaines.

Notre théorie structurale a pour premier effet d'asseoir sur des bases solides la théorie des quanta (mécaniques ondulatoires) et d'en faire paraître les principes naturels et acceptables. Ceci exige une longue critique axiomatique. Il nous semble que seules les idées qui précèdent puissent fournir la base désirable. Ensuite la Physique structurale permet d'établir des résultats très généraux que ne permettent pas d'obtenir les théories quantiques habituelles. Par exemple nous avons pu démontrer que les corpuscules élémentaires ne pouvaient être, vis à vis du spin ou moment de rotation propre, que de trois types au plus: ceux pour lesquels le spin a les valeurs $-1, 0, +1$, (par exemple le photon de de Broglie⁽¹⁾ ou le corpuscule du premier type de Petiau)⁽²⁾, ceux pour lesquels il a les valeurs $-\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}$ (par exemple corpuscule du second type de Petiau), ceux pour lesquels il a les valeurs $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ (par exemple l'électron de Dirac)⁽³⁾. On a aussi des lois pour les corpuscules à spin multiple.

Enfin notre théorie permet d'aborder la construction d'une Mécanique relativiste des systèmes: elle fait comprendre pourquoi on ne peut la construire sous forme ancienne et qu'elle est nécessairement ondulatoire. Le premier point est la généralisation pour un système des transformations de Lorentz: celles-ci contiennent nécessairement des opérateurs et l'on a un espace de configuration-temps hypercomplexe à $3n+1$ dimensions. Ce résultat entraîne qu'il ne peut exister de Mécanique des systèmes relativiste ponctuelle: elle est nécessairement ondulatoire. Le caractère hypercomplexe vient du fait que des événements simultanés pour un obser-

(1) Louis de BROGLIE: *Une nouvelle conception de la lumière et Nouvelles recherches sur la lumière*. (Actualités Scientifiques, Hermann Paris).

(2) G. PETIAU: *Contribution à la Théorie des équations d'ondes corpusculaires*. (Thèse pour le doctorat ès sciences; Paris 1936.).

(3) DIRAC: *Quantum mechanics* (2e éd. Oxford Press. 1936).

vateur ne le sont plus pour un observateur en mouvement par rapport à celui-ci. En outre, on a des théorèmes pour le centre de gravité, mais les théorèmes classiques ne s'étendent que dans des cas spéciaux à la théorie relativiste. Nous n'insisterons pas sur ces résultats physiques et nous renvoyons le lecteur à nos mémoires. Ajoutons seulement que la théorie structurale doit, nous semble-t-il, permettre l'unification des théories quantiques et relativistes demeurées jusqu'à maintenant inconciliables.

11. *Opposition avec la conception atomistique.* Pendant un certain temps nous avons cru à la possibilité de réaliser l'idée des atomisticiens de reconstruire tout l'univers de la Physique uniquement en utilisant les éléments ultimes, c'est-à-dire les corpuscules élémentaires. Toute l'étude qui précède nous montre qu'un tel idéal non seulement ne peut être atteint ni même approché, mais encore est complètement opposé à toutes les notions que nous avons soutenues dans ce travail: pour le soutenir il faut être réaliste naïf ou platonicien.

En effet, notre attitude subjectiviste de ne faire intervenir que les actions commises par les observateurs, ce qui impose la considération immédiate d'appareils macroscopiques, nous met dans une impossibilité de fait d'atteindre l'idéal atomistique. En utilisant les éléments ultimes uniquement, nous ne pourrions pas parvenir dans notre reconstruction à la notion de mesure d'une grandeur: il y a un hiatus. Il ne peut être comblé que si l'on peut retirer aux mesures leur caractère essentiel, à savoir que les résultats de mesure ne peuvent être attribués aux systèmes observés, mais au complexe appareil-mesure, c'est-à-dire si l'on a une physique des propriétés intrinsèques des objets physiques. Dans ce cas, en effet, un ensemble d'un nombre suffisamment grand de corpuscules possèdera des lois résultant des lois atomiques acceptées initialement. Mais nous avons vu que nous ne pouvions avoir une physique des propriétés intrinsèques. La conception classique extrapolée dans l'atomisme ne peut donc être soutenue et le hiatus subsiste.

Cependant nous avons admis comme hypothèse que toute suite de morcellements était limitée et que tout système observé était constitué d'un nombre fini de corpuscules élémentaires. Ces corpuscules se trouvent posséder par cela même des lois assimilables à des lois d'existence pure: on leur reconnaît les propriétés des ensembles abstraits. En utilisant des propriétés issues de résultats expérimentaux, c'est-à-dire de collectifs de mesures, on pourra reconstruire, semble-t-il, tout au moins partiellement la physique en sui-

vant la conception atomistique: par exemple notre théorie de l'espace corpusculaire qui joue le rôle d'espace physique. Mais cette construction ne suit qu'en apparence l'idéal atomistique: en effet les propriétés ainsi adjointes supposent que des mesures ont été effectuées: c'est là que se glissent les éléments non purement atomiques provenant des mesures. Ceux-ci introduits sous forme de concepts permettent d'atteindre en partie le but fixé d'une reconstruction de la physique théorique à partir d'éléments atomiques, mais elle n'est qu'un tableau partiel, une gravure incomplète sur laquelle les faits ont marqué par avance une trame, comme le grain du papier altère par avance le trait du dessin; ceux-ci ne permettent pas d'exprimer certains sentiments; cette trame préliminaire fait échouer la reconstruction. En effet ces éléments adjoints n'ont de sens physique que parce qu'ils proviennent de résultats de mesures et ceux-ci supposent que la Physique théorique des observateurs a été préalablement construite, sinon la théorie atomique pure conforme à l'idéal atomistique ne serait qu'une construction abstraite sans lien avec la réalité.

Ainsi la théorie atomique pure que l'on peut construire apparaît un complément à la physique structurale bien qu'elle soit en réaction dans sa forme avec cette dernière conception. Elle exprime en langage des propriétés des objets, c'est à dire au moyen du réalisme platonicien le peu qu'il soit possible d'exprimer ainsi: c'est le seul édifice à tendance strictement atomistique que la physique structurale des observateurs nous permette de construire et ce n'est que la forme et non le fond qui a une apparence atomistique.

4. *Classification des propositions d'une théorie physique.* Les développements qui précèdent nous conduisent à classer les propositions d'une théorie physique en plusieurs catégories suivant le genre des énoncés qu'elles expriment. Les propositions d'une théorie physique sont soit 1°. des énoncés de résultats de mesure, soit 2°. des énoncés de prévisions, c'est à dire des énoncés sur les probabilités des valeurs du résultat de mesures à effectuer ultérieurement, soit 3°. des énoncés concernant des éléments abstraits adjoints aux éléments ayant une signification physique (ces éléments étant les résultats de mesure, les énoncés de probabilités, les propriétés qualitatives des appareils de mesure; les adjonctions sont faites des deux manières indiquées) soit 4°. des énoncés établissant des correspondances entre des ensembles de ces divers éléments, c'est-à-dire des énoncés définissant des transformations, ou des énoncés attribuant des propriétés à des ensembles ou à des

transformations. Ce sont les seuls types de propositions que nous ayons à considérer dans une théorie physique.

Cette classification a une certaine importance, car elle nous a servi pour établir notre démonstration de l'unité de la physique théorique⁽¹⁾. Cette classification provient de la façon dont on conduit la synthèse inductive et de la forme que l'on prend pour l'axiomatique d'une théorie physique. Pour toute théorie physique construite jusqu'à maintenant on peut classer toutes ses propositions dans les quatre classes que nous venons d'indiquer, et on doit considérer que cette propriété devra se maintenir, tout au moins dans un proche avenir, mais elle n'a rien d'absolu et n'est qu'une classification commode. L'unité de la physique pourrait aussi être démontrée sans y faire appel, cependant il est bon de noter que les propositions des théories physiques ne sont pas des propositions absolument quelconques.

5. *Physique théorique et Physique mathématique.* Dans tout ce travail nous avons dégagé un certain nombre de caractères généraux des théories physiques, mais nous n'avons jamais parlé de la „Physique théorique“ ou de la „Physique mathématique“. Il n'est pas facile d'en donner des définitions, surtout que l'une diffère de l'autre plus par des tendances où des points de vue auxquels on se place que par une séparation nettement tranchée. C'est pourquoi suivant les auteurs on trouve des différences très grandes concernant leur définition. Sans faire un exposé historique citons l'opinion de quelques auteurs.

Pour Rankine⁽²⁾ „la physique expérimentale se transforme en physique théorique par la découverte du système de principes le plus simple dont on puisse déduire les lois qui formulent l'expérience. Ce principe n'est pas naturel, comme dans les sciences directement abstraites. Il est médiat et dérivé, il n'est pas le commencement de la recherche, il en est un aboutissement assez tardif. Aussi ne peut-il s'imposer d'une façon nécessaire. Il ne peut qu'être proposé“. Pour un physicien d'une époque moins ancienne comme Chwolson⁽³⁾ „la physique théorique contient ce qui peut se dé-

(1) Thèse complémentaire de Philosophie (Paris, 1938). (Bulletin Scient. de l'Ecole Polytechnique de Timișoara, Roumanie, Editeur).

(2) Voir ABEL REY: *La théorie de la Physique chez les physiciens contemporains*. p. 29—30. (Alcan. Paris 1923).

(3) CHWOLSON: *Traité de Physique*. introduction gle, t. I. (Hermann Paris 1908).

duire des phénomènes eux-mêmes, en partant d'une hypothèse déterminée et de lois de dépendance bien établies, parfois même de ces dernières seulement. En établissant la nécessité des phénomènes observés comme conséquence de ce qui était reconnu ou admis, la Physique théorique résout à nouveau la question de la forme que doit avoir un phénomène dans les circonstances où il n'a pas encore été observé; en d'autres termes, elle prédit un phénomène... La théorie nous met en état d'unifier, de lier entre eux les phénomènes observés et nous donne, ce qui est surtout important, la possibilité de trouver les voies ou plus exactement les expériences qui peuvent servir à la vérification des hypothèses, c'est-à-dire à augmenter ou à diminuer leur degré de probabilité. Dans un sens plus large la théorie, tout en conservant son caractère déductif, peut se passer même de son instrument le plus puissant, les mathématiques: Faraday n'était pas un mathématicien, et pourtant il faut le tenir pour le plus grand des théoriciens.

„Mais actuellement le rôle de l'analyse mathématique dans la physique théorique a pris une importance prédominante, et sans elle le développement de la Physique dans beaucoup de ses parties importantes serait difficile à concevoir“.

Quant à la physique mathématique, pour cet auteur, elle diffère essentiellement de la physique théorique: il lui assigne pour domaine l'étude de questions très diverses, qui se trouvent liées entre elles par la façon particulière dont on les pose et les résout. „La physique mathématique, dit-il part d'un *fait établi solidement* par l'expérience et qui exprime une certaine loi de dépendance entre les phénomènes. Elle donne à cette relation une forme mathématique, et elle étudie exclusivement à l'aide de l'Analyse mathématique les conséquences qui en résultent“. Etant donné que la physique mathématique ne renferme rien d'hypothétique, ses résultats, ajoute-t-il, sont impérissables. „Comme c'est un fait qui leur sert de fondement, ils restent tels malgré tous les changements d'opinion scientifique qui peuvent survenir au cours du temps sur sa nature intime. Au contraire, les parties de la Physique théorique qui s'appuient sur des hypothèses peuvent s'écrouler“.

Pour Chwolson, la Physique mathématique ainsi définie a une utilité beaucoup moins grande que la Physique théorique. C'est cette dernière qui a été la plus profitable à la science, quoiqu'elle ait été établie sur un terrain incertain et sur des hypothèses plus ou moins passagères. D'ailleurs pour lui l'importance de la Physique mathématique a été en diminution constante, d'abord du fait

qu'elle n'est en état de résoudre que des problèmes relativement très simples, et que souvent elle n'aboutit qu'à des formules si compliquées que leur utilisation est pratiquement impossible.

Poincaré ne s'est point préoccupé de ce séparatisme entre Physique théorique et Physique mathématique: il emploie uniquement ce dernier terme et y englobe la Physique théorique. C'est là une confusion qui a souvent été faite en ces dernières années, pendant les périodes de modifications et de transformations par lesquelles sont passées les théories physiques. Mais elle ne saurait plus être commise aujourd'hui alors que nous allons voir s'affirmer les caractères propres à chacune de ces physiques et, conséquemment, apparaître leurs différences.

Pour montrer combien sont distinctes la Physique théorique et la Physique mathématique conformes à ces vues nouvelles, nous ne saurions mieux faire que de citer les définitions si pleines de justesse qu'en donne M. Louis de Broglie dans la préface de notre ouvrage, „Les Principes de la Mécanique générale“⁽¹⁾ où nous avons exposé les raisonnements qui nous ont paru constituer le début d'une rénovation de la Physique mathématique.

„Il y a deux manières de considérer les théories physiques. On peut s'intéresser principalement à leur sens concret, à leur puissance explicative des faits expérimentaux, aux aperçus qu'elles nous ouvrent sur la nature du monde physique. On peut au contraire les envisager *in abstracto*: chercher à dégager leur ossature logique et à systématiser du point de vue le plus général leur structure mathématique et leurs rapports mutuels. On a proposé très justement de distinguer ces deux tendances, en disant que la première caractérise la Physique théorique et la seconde la Physique mathématique“.

Entre l'opinion de Chwolson et celle de M. Louis de Broglie, on voit que les différences sont nettement tranchées. Pour ce dernier la Physique mathématique n'est pas l'étude mathématique d'une certaine loi de dépendance entre les phénomènes, c'est l'étude du cadre logique et mathématique de la Physique théorique et de la Mécanique, celle de tous les systèmes de lois de dépendance envisagés abstraitement du point de vue logique. En somme, pour M. Louis de Broglie, la Physique mathématique est une branche, non pas de l'Analyse mathématique, mais plutôt de la logique et plus exactement de la Logique appliquée.

Ce changement de conception de la Physique mathématique

⁽¹⁾ LOUIS DE BROGLIE: Préface à notre ouvrage „Les Principes de la Mécanique Générale Actualités Scientifiques fasc. 140 (1934).

vient de ce qu'au cours de ses derniers développements la Physique théorique a employé un appareil mathématique de plus en plus compliqué en faisant intervenir les mathématiques les plus modernes, ce qui a amené à penser qu'il serait bon de faire précéder l'étude de la Physique théorique de celle de son appareil symbolique.

Il n'en faudrait pas cependant déduire que la physique mathématique moderne devrait consister en l'étude de certains chapitres d'analyse ou de géométrie. Bien au contraire, la Physique mathématique nouvelle doit être construite sur des méthodes qui lui soient personnelles en lui conférant un aspect particulier, bien distinct de ceux de l'Analyse et de la géométrie. Déjà ce nouvel aspect s'est manifesté par la mécanique générale qui doit former une des branches de cette nouvelle Physique mathématique. Lorsqu'on en étudie les principes, on lui trouve un caractère bien distinct de celui de l'Analyse générale, de celui de la Mécanique classique ou de celui de la Physique théorique moderne. Elle a son aspect propre. Evidemment son caractère d'abstraction est du même degré que l'Analyse générale, mais elle n'est pas plus de l'Analyse générale que la Mécanique rationnelle n'est de l'Analyse classique.

En somme la nouvelle Physique mathématique n'a véritablement rien de commun avec la Physique mathématique classique. Alors que cette dernière est une construction inébranlable, non modifiable, statique, immuable, sans transformisme possible, sans liaison avec la Physique théorique, la nouvelle Physique mathématique doit au contraire emprunter à la Physique théorique son dynamisme, puis la suivre comme une ombre puisqu'elle a pour objet de constituer le cadre de ses raisonnements. Dès lors, elle doit tantôt la précéder, tantôt la suivre, mais toujours l'accompagner. Alors que la vieille physique mathématique n'étudiait que des faits particuliers, sans autre lien entre eux que la méthode d'étude, la nouvelle Physique mathématique devra être extrêmement générale et en tout cas beaucoup plus générale et plus formelle que la Physique théorique. En même temps qu'au domaine mathématique elle est à rattacher à la Logique appliquée à la Physique. Aussi conviendrait-il peut-être de la dénommer „Physique abstraite“ en s'inspirant du terme „Espaces abstraits“ qui s'applique à une géométrie basée sur les mêmes principes.

La Physique mathématique au sens que nous venons de préciser n'est pas seulement l'étude du symbolisme des théories physiques, mais doit être aussi l'étude des théories partielles. Autrement

dit, ayant adopté une axiomatique correspondant à une théorie partielle, il convient d'en étudier les conséquences par voie de raisonnement déductif à la manière de n'importe quelle autre théorie mathématique. En ce sens elle constitue un ensemble de théories mathématiques et de cette manière elle se présente comme une partie de l'ensemble de la Physique théorique.

En somme la distinction entre Physique mathématique et Physique théorique, qui apparaît nettement marquée quant à leur esprit, est cependant assez délicate en fait car il est difficile de ranger un certain nombre de théories dans l'une plutôt que dans l'autre. On peut passer d'une façon progressive et pour ainsi dire continue de la Physique mathématique à la Physique théorique. L'aspect Physique mathématique nous apparaît quand, dans la construction, nous donnons la préséance aux exigences des théories déductives sur celles de la synthèse inductive, l'aspect Physique théorique nous apparaît quand, au contraire, nous donnons la préséance aux conditions de la synthèse inductive sur celles des théories déductives. Les deux sciences sont donc conçues suivant des esthétiques différentes, qu'on peut mêler en donnant la prédominance à l'une ou à l'autre. La distinction réside avant tout entre deux tendances qui se complètent.

Pour conclure nous dirons que la Physique théorique est l'ensemble des théories physiques orienté dans la recherche de l'unification des théories existantes et de théories nouvelles mieux adéquates qui schématisent de nouveaux phénomènes. Donc tendance à la synthèse et à l'unité. La Physique mathématique au contraire est l'étude du formalisme des théories physiques et des questions mathématiques qui y sont liées, c'est-à-dire l'étude des parties déductives des théories physiques partielles. C'est une étude de caractère analytique.

Il y a enfin une autre branche qui ne rentre ni dans la Physique théorique ni dans la Physique mathématique, c'est l'étude des questions générales concernant les théories physiques, branche qui doit jouer le même rôle vis à vis de la Physique théorique que la Logique vis à vis des mathématiques. Notre mémoire sur l'unité de la Physique théorique est justement le premier exemple de raisonnements de ce genre. De même que les mathématiques ne suffisent pas pour édifier la Physique théorique, la Logique pure ne suffit pas pour établir les résultats de cette branche nouvelle, mais elle apporte la même aide que celle apportée par les mathématiques dans la construction de la Physique théorique. C'est en

somme la théorie des théories physiques. On serait tenté de la désigner par l'un des termes suivants, dont d'ailleurs aucun ne nous paraît satisfaisant: Métaphysique mathématique, Métathéorie physique, Physico-logique; c'est ce dernier terme que nous avons adopté. Nous sommes persuadé que cette théorie des théories aura un jour une importance comparable à celle de la Logique envers les mathématiques.

CONCLUSION.

De ce travail il se dégage tout d'abord qu'il existe une physique nouvelle qui doit être établie sur des bases bien différentes de celles de la physique classique. La raison est que le domaine de cette physique nouvelle est beaucoup plus étendu que celui de la physique classique, puisque outre le domaine de l'échelle humaine il comprend le microscopique ou atomique et le très grand, l'univers entier. Dans ces échelles extrêmes la conception classique conduit à des résultats en désaccord avec l'expérience, force est donc d'accepter de nouvelles conceptions. Tous les principes intangibles de la science classique ayant été, comme nous l'avons vu, successivement battus en brèche, le caractère essentiel des nouveaux fondements devra être le provisoire, l'incomplet, l'approché, l'imparfait. Comme nous l'avons déjà indiqué, „pour toute vérité d'ordre scientifique le plus que nous puissions faire est de délimiter un certain champ d'éventualités où nous nous sentirons en droit d'admettre qu'elle ne sera pas démentie“, les règles de raisonnement elles-mêmes étant comprises dans ces vérités. La certitude pratique remplace partout la certitude absolue: La réalité, d'autre part, n'est pas préformée, nous la construisons mentalement en grande partie avec des notions déjà dégagées et schématisées.

Si aucune connaissance n'est prédicative, le domaine d'application d'un concept ne peut jamais être définitivement clos, le sens de celui-ci ne peut jamais être définitivement fixé, il demeure toujours ouvert et en devenir, suspendu entre un concret dont il est issu et tourné vers un abstrait toujours en formation.

Le caractère sommaire et incomplet de la connaissance scientifique a pour caractère complémentaire un caractère simplificateur; nous ne retirons d'une réalité mouvante en partie construite par nous que des traits essentiels, et nous ne pouvons parvenir ainsi qu'à un schéma, qui comme tout schéma est abstrait. Un effort d'abstraction est donc à la base de toute théorie. Nous avons une méthode qui nous conduit le plus facilement à ces abstractions, c'est la méthode axiomatique. Mais cet abstrait ne peut avoir

une existence autonome, il conserve une signification extérieure dans les réalisations d'où il a été extrait, et pourra apparaître ultérieurement comme une réalisation d'un abstrait supérieur. La forme théorique apparaît par l'emploi de règles de raisonnement qui se sont, elles aussi, dégagées progressivement par des schématisations du même genre que celles qui ont donné naissance à la géométrie; on peut de certaines propriétés schématisées parvenir à de nouvelles propriétés avec une certitude pratiquement assurée si l'on est assez sage pour ne pas trop s'écarter du domaine dans lequel on a pu contrôler qu'elles étaient vérifiées. Dès lors il suffit, ayant accepté certaines lois de raisonnement et aussi certaines lois de définition, de dégager des notions schématisées permettant de retrouver par le raisonnement toutes les notions et les lois dont on aura besoin. Lorsqu'on a atteint ce stade, la schématisation a pris la forme d'une théorie déductive.

La nécessité se fait alors sentir d'étudier certains caractères généraux des théories deductives. Nous sommes arrivé à la définition suivante: Une théorie déductive est constituée par 1°) des termes primitifs, 2°) des fonctions de ces termes primitifs dites fonctions définissantes qui transforment un ensemble de termes primitifs en un élément dit terme défini; 3°) On a des éléments d'un autre type que les termes primitifs qu'on appelle propositions. Ce sont des fonctions de termes primitifs ou définis; 4°) Parmi les propositions certaines sont appelées axiomes; 5°) Il existe un signe $\rightarrow$ qui se lit „entraîne“. A gauche de ce signe on écrit une proposition, à droite une autre proposition qui est dite „justifiée“ si celle écrite à gauche est un axiome ou une proposition déjà justifiée.

Le but poursuivi dans l'emploi de la méthode déductive est de remplacer les discussions dans chaque cas particulier par des règles générales explicitement formulées: la discussion ne porte plus alors que sur les éléments primitifs et les règles. On a encore sur cet exemple la marque de l'esprit simplificateur dans lequel est édifiée la science. Le premier effet de la méthode déductive est de permettre un classement ramifié, la connaissance des règles adoptées et des têtes de séries permettant d'obtenir ensuite tous les autres éléments de la classe. Par cette méthode on obtient le maximum d'enchaînements et ces enchaînements fournissent l'essentiel de l'explication scientifique actuelle, ceux-ci étant étroitement adaptés et constituant une schématisation adéquate. Pour cette adéquation il ne suffit pas toujours de choisir convenablement les concepts et postulats et de conserver la logique classique L_0 . Il peut

être nécessaire de modifier les règles de définition et de raisonnement, et d'adopter ainsi une autre logique. Tel est le cas de la théorie des quanta actuelle. D'ailleurs les règles de raisonnement définies par la logique classique L_0 ne sont pas à priori et ont été dégagées progressivement, aussi il n'y a pas de raison de décréter à un certain moment que son évolution est terminée. La logique n'est pas d'essence différente du reste de la science et, comme il n'y a pas de vérité „en soi“, la logique elle aussi est constituée par un schéma adéquat. Il ne faut donc pas s'interdire de faire des modifications, pourvu qu'en transgressant une règle classique on justifie, au moins partiellement, qu'en agissant ainsi on améliore la schématisation.

Nous sommes alors conduit à construire une Logique que nous avons désignée par L_1 et qui a des règles moins fortes que la Logique classique L_0 . Cette Logique sera le point de départ de généralisations qui seront adéquates à l'étude de certaines questions: un tel changement de Logique est nécessaire pour édifier la théorie actuelle des quanta. Dans un autre travail nous avons défini une Logique L_2 qui est une généralisation de L_1 et qui se montre bien adaptée à l'étude de certaines questions de la théorie des théories physiques. Dans cette Logique L_1 nous ne nous bornons pas à l'étude du calcul des propositions, mais nous étudions aussi les fonctions propositionnelles.

Nous examinons ensuite les conditions que l'on doit imposer aux théories déductives. Une première notion nous apparaît, c'est celle d'équivalence; elle nous conduit à faire intervenir un groupe, le groupe d'équivalence de la théorie considérée; deux théories équivalentes sont deux théories telles que tout terme primitif de l'une est définissable au moyen de termes primitifs de l'autre et tout axiome de l'une est conséquence des axiomes de l'autre. Deux théories équivalentes peuvent être considérées comme non distinctes, d'où l'importance du groupe d'équivalence. Deux théories qui ont leurs groupes d'équivalence isomorphes ont évidemment des analogies d'où l'intérêt de leur étude que nous amorçons.

Comme conditions à imposer à une théorie déductive nous n'en retenons que deux comme essentielles: la condition d'indépendance des termes primitifs et des axiomes, c'est à dire non-surabondance. Cette condition n'a qu'un intérêt simplificateur et il n'est pas indispensable de la remplir. La seconde condition au contraire est fondamentale et il est indispensable d'y satisfaire, sans cela il n'y aurait pas adéquation, c'est la condition de consistance, qui est la

condition pratique qui remplace la non-contradiction dont on ne peut réussir à fournir la preuve dans la plupart des cas. Une théorie sera consistante si la non-contradiction d'une théorie déjà admise doit entraîner la non-contradiction de la théorie considérée, la preuve de la non-contradiction de la théorie déjà admise n'étant pas en général prouvée. Pour une théorie physique la consistance reviendra à prouver que la théorie sera non-contradictoire si une théorie mathématique comme l'arithmétique, ou l'analyse est non-contradictoire. La condition d'adéquation est alors satisfaite sur le point de la non-contradiction, car il n'est pas douteux que l'arithmétique est bien adaptée et qu'il doit être préférable de modifier la logique au cas où l'on parviendrait à démontrer la contradiction de l'arithmétique plutôt que de la rejeter et de garder la Logique L_0 inaltérée. Ceci montre que pour un idéoniste la condition de consistance est suffisante, sans qu'il soit nécessaire d'exiger la non-contradiction.

Une question se pose alors: si une théorie physique se met une fois achevée sous forme d'une théorie déductive, l'énoncé axiomatique doit-il être précédé d'une partie préliminaire, ou au contraire les termes primitifs et les postulats d'une théorie physique sont-ils suffisamment clairs et évidents par eux-mêmes pour qu'on n'ait pas à faire précéder leur énoncé d'une explication? Il n'est pas difficile de prouver la nécessité d'une telle partie préliminaire, et nous devons étudier la forme qu'il convient de lui donner. Une Théorie physique comprend alors trois parties: cette partie préliminaire à laquelle nous avons donné le nom de *synthèse inductive*, puis un énoncé axiomatique, enfin la partie déductive. Cette distinction est cependant un peu trop sommaire, car si ces parties doivent être effectivement distinguées elles se recouvrent et sont fortement imbriquées les unes dans les autres. Ceci provient du fait que les postulats ne sont pas tous énoncés simultanément mais progressivement au fur et à mesure des besoins, et au fur et à mesure que les notions fondamentales se dégagent. Une partie de la théorie qui est déductive par rapport aux premiers axiomes apparaît au contraire comme préliminaire par rapport aux concepts et postulats qui sont introduits dans la suite. Nous disons même plus: la partie déductive qui offre vraiment de l'importance est celle qui peut être considérée comme appartenant par un certain côté à la synthèse inductive.

La forme de cette partie préliminaire est beaucoup moins facile à mettre en évidence que la forme de la partie déductive. Si

dans certains cas on peut introduire des postulats nouveaux par des appels à l'expérience, ceci n'est possible que pour une théorie déjà assez avancée. En général il faudra introduire des idées simples sans pouvoir faire appel à des expériences précises et c'est là que se manifeste la plus grande difficulté dans l'élaboration d'une théorie physique. Une méthode qui se montre fort utile est la méthode historico-critique mais elle ne suffit pas, car en somme elle ne nous permet que des comparaisons avec des théories antérieures; quant à la justification des notions nouvelles elle ne peuvent être introduites que par des appels à l'intuition. Ainsi cette synthèse inductive est par nécessité hétérogène, comprenant des morceaux de théories déductives, des comparaisons avec des théories antérieures, des explications plus ou moins formalisées faisant appel à l'intuition. Son unité ne vient que du but à atteindre: faire accepter une axiomatique. C'est la partie essentielle, à notre sens, d'une théorie physique. Amputée de cette partie, une théorie physique apparaîtrait comme un ouvrage dont il manquerait le premier volume et dont on demanderait à la sagacité du lecteur de le reconstruire pour pouvoir comprendre la suite.

Ainsi le résultat de cette synthèse inductive sera l'édification de la théorie physique que l'on considère. Synthèse, car son but est d'englober dans un même schéma des connaissances disparates; inductive, car elle conclut du particulier au général, du certain au conjectural; ses raisonnements sont toujours aventurés.

Enfin des conditions d'ordre esthétique jouent un rôle très important dans l'édification d'une théorie physique. Elles fixent une grande partie de l'arbitraire qui subsiste quand les conditions générales indiquées plus haut sont remplies.

Dans un dernier chapitre nous examinons quelques caractères des théories physiques, ce qui nous conduit à notre conception que nous avons désignée par le terme de *physique structurale*, dont nous faisons ressortir les principes essentiels, puis nous classons en quatre catégories les propositions d'une théorie physique, classement qui intervient dans certains raisonnements.

Enfin nous faisons ressortir les différences entre la Physique mathématique et la Physique théorique. La Physique théorique apparaît comme l'ensemble des théories physiques orienté dans la recherche de l'unification des théories existantes et de théories nouvelles mieux adaptées qui schématisent des nouveaux phénomènes. La Physique mathématique au contraire consiste en l'étude du formalisme des théories physiques et des questions mathématiques

qui y sont liées, c'est-à-dire l'étude des théories déductives partielles. La première est synthétique et tend vers l'unité, la seconde est analytique.

Nous distinguons alors une nouvelle branche, la Physico-logique, qui doit jouer vis à vis de la Physique théorique le même rôle que la Logique vis à vis des mathématiques et qui est en somme la théorie des théories physiques. Un résultat de ce nouveau domaine est la démonstration de l'unité de la Physique théorique. Nous pensons qu'elle sera dans l'avenir d'une grande utilité.

Vu

Paris, le 4 Novembre 1937.

Pour le DOYEN et par autorisation

LE PROFESSEUR DÉLÉGUÉ

A. CHOLLEY.

Fu

et permis d'imprimer

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE

DE PARIS

G. ROUSSY.

TABLE DES SYMBOLES.

LETTRES UTILISÉES

A	abréviation pour „axiome“ ou postulat.
a, b	désignent des termes définis p. 25, 33.
C, D	désignent des systèmes d'axiomes p. 59.
c, d	(avec des indices) désignent des termes primitifs p. 24, 32, 59.
c_j, d_j	désignent un ensemble fini de termes primitifs p. 24, 32, 59.
Df	abréviation pour „définition“.
E_{p_i}	désigne un certain ensemble de propositions, défini p. 63.
E_x	signifie „l'ensemble des x tels que...” p. 33, 63.
e	proposition „unité“ définie par VI (e)=V p. 49.
F	valeur logique faux dans le cas de L_0 où $f = \Lambda$ p. 47.
f	valeur logique „faux“ p. 36.
f, g	désignent des fonctions, comme $f(x)$ p. 25, 32.
$f \sim$	fonction définissant la valeur logique de la négation p. 36.
$\tilde{\mathfrak{A}}$	„fermeture“ d'un ensemble p. 103.
$\mathfrak{G}_e$	„groupe d'équivalence“ d'une théorie p. 60.
$\mathfrak{G}_{ea}$	groupe d'équivalence des axiomes d'une théorie p. 59.
$\mathfrak{G}_{et}$	groupe d'équivalence des termes primitifs p. 60.
h	constante de Planck p. 97.
$\cdot$	opérateur hamiltonien p. 100.
L_0	logique classique.
L_1	première logique idonéiste.
L_2	seconde logique idonéiste.
L_F	logique de Mlle Février.
o	proposition „zéro“ définie par VI(o)= f , p. 49.
p, q, r, s	désignent des propositions.
p	désigne un postulat p. 24, 33.
p_x	composante x d'une quantité de mouvement p. 97.
R	opération binaire p. 37.
R_e	opération sur les valeurs logiques associée à R p. 37.
$\mathfrak{R}$	relation p. 103.

Γ	valeur logique „tiers“ p. 39.
T	opérateur p. 32.
T_r	opérateur sur les valeurs logiques associé à un opérateur p. 37.
Th	abréviation pour „théorie“ p. 68.
$th.$	abréviation pour „théorème“.
$Tp.$	abréviation pour „terme primitif“.
$\vee$	opération sur les valeurs logiques: „sommation“, p. 39.
$\bar{V}$	valeur logique „vrai“ p. 35, 36.
V	opérateur „vérité“ p. 48.
Vl	Valeur logique, fonction définie p. 35.
X	élément de prévision p. 100.
$\frac{\partial X}{\partial t}$	dérivée partielle de X par rapport au temps. p. 100.
x, y	variables parcourant un ensemble p. 32.
x	coordonnée d'un corpuscule p. 97.
x_p	variable sur un ensemble de propositions. p. 35.
(x)	opération de 2e espèce schématisant „quel que soit $x...$ “ p. 51.
α, β, ξ	valeurs logiques non précisées. p. 36, 39, 41.
Δ	„incertitude sur“ p. 97.
Λ	valeur logique „non-vrai“. p. 35.
$=$	signe d'égalité p. 32, 36.
$=_d$	symbole de définition: égalité de définition. p. 25, 26.
$\equiv$	égalité entre opérateurs. p. 58.

OPÉRATIONS LOGIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

$\sim$	négation; schématisation de „non“. p. 36.
V	opération „vérité de....“ p. 48.
$\rightarrow$	implication; schématisation de „entraîne“. p. 25, 26, 33, 43, 54.
$\&$	produit logique; schématisation de la conjonction „et“ p. 37, 38, 43.
$\vee$	somme logique; schématisation de la conjonction „ou“ définie par $p \vee q =_d \sim(\sim p. \& . \sim q)$. p. 39, 43.
$ $	incompatibilité de Nicod; p. 48, 54.
$\parallel$	incompatibilité forte: p. 62.
$\leftrightarrow$	équivalence p. 45, 57.
$\equiv$	identité logique p. 40, 41.
$\oplus$	pseudo-addition p. 49.

OPÉRATIONS LOGIQUES DE SECONDE ESPÈCE

$\exists x$	„Il existe un x tel que...“ p. 50.
(x)	„quel que soit $x...$ “ p. 51.

AUTRES SYMBOLES OPÉRATOIRES

- $\in$ „appartient à“, si a est un élément d'un ensemble E on écrit $a \in E$; p. 35, 64.
 $\supseteq$ „inclusion“ pour les valeurs logiques. p. 36.
 $\vee$ „sommutation“ pour les valeurs logiques. p. 39.
 $\vdash$ signifie que la proposition écrite à droite est „vraie“. p. 44.
 $\times$ „Produit direct“ pour les groupes. p. 60.
 $-$ „soustraction“ pour les axiomes d'un système. p. 65.
 $\{a\}$ désigne l'ensemble défini par l'élément a . p. 103.
 $+$ opération d'addition (pour des éléments abstraits) p. 103.
 $\cdot$ opération de produit (pour des éléments abstraits) p. 103.
 $(E, \mathfrak{R})$ désigne une structure p. 103.

En dehors des cas spéciaux indiqués, $()$, $[]$, $\{ \}$, ... désignent l'ordre dans lequel doivent être effectuées les opérations.

BIBLIOGRAPHIE.

- G. BACHELARD: *La formation de l'esprit scientifique* (Vrin 1938).
Les Intuitions atomistiques (Boivin, Paris 1933).
Le Nouvel Esprit scientifique (2e. éd. Alcan. Paris).
- G. BOULEGAND: *Théorie générale des groupes* (Vuibert Paris 1935).
La Causalité des théories mathématiques. Actualités scientifiques 184.
 (1934).
Structure des théories. Actualités Scient. 548 (1937).
Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique.
 Mém. Sc. Math. no. LXXI.
La notion de Stabilité: Bull. Acad. Roy. Belgique t. XXI. no. 3, mars
 1935 p. 277; no. 8—9, août 1935 p. 776. *Domaine de causalité*. Revue générale
 des Sciences (15 Mai 1935). Revue Scientifique (13 Mai 1933).
- LOUIS DE BROGLIE: *Introduction à l'étude de la Mécanique ondu-*
laire (Hermann Paris 1930).
Théorie de la quantification dans la nouvelle Mécanique (Hermann
 Paris 1932).
L'Electron magnétique (Hermann 1934).
Une nouvelle Conception de la lumière. Actualités Scientifiques.
Nouvelles recherches sur la lumière. Actual. scient. no. 4 1936.
 Préface de l'ouvrage de M. J. L. Destouches „principes de la Mécani-
 que générale“.
L'Invention en Physique théorique. Article dans la Revue „Science“ no.
 14, (Juin, 1937).
- L. BRUNSCHVIG: *L'Expérience humaine et la causalité* (Alcan, Pa-
 ris 1922).
 L. CHWISTEK: *La pluralité des réalités et Granice Nauki* (Lwów).
 CHWOLSON: *Traité de Physique* (Trad. fse) (Hermann 1903).
 J. L. DESTOUCHES: *Principes fondamentaux de Physique théorique*.
 (Hermann 1938).
Traité de Mécanique ondulatoire des systèmes. (Hermann 1936).
Les Principes de la Mécanique générale. Actualités scientifiques no.
 140 (1934).
Le Rôle des Espaces abstraits en Physique nouvelle. (Actualités scien-
 tifiques 223 (1935). Fasc. IV de la série d'Exposés d'Analyse générale diri-
 gée par M. Fréchet.
Essai sur l'unité de la Physique théorique. (Thèse complémentaire
 pour le Doctorat ès-Lettres. Bull. Scient. de l'Ecole Polytechnique de Timi-
 șoara. 1938).

Travaux sur la Mécanique ondulatoire, les Mécaniques abstraites et la Physique structurale:

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 193. (1931) p. 518; t. 194 (1932) p. 589; t. 195 (1932) p. 1374; t. 196 (1933) p. 529; p. 1955; t. 197 (1933) p. 120, 552; t. 198 (1934) p. 467, p. 1576; t. 199 (1934) p. 779, p. 1594; t. 200 (1935) p. 192; t. 201 (1935) p. 369; t. 202 (1936) p. 387, p. 921; t. 203 (1936) p. 924; t. 204 (1937) p. 849, p. 1403, p. 1618; t. 206 (1938) p. 319.

Journal de Physique. s. VII t. 5 (1934) p. 320; t. 6 (1935) p. 329; t. 7 (1936) p. 305; p. 354, p. 427; t. 8 (1937) p. 145, p. 251.

Comm. IXe Congrès Int. Philo. Paris 1937. fasc. VII p. 60.

Recherches sur les Mécaniques ondulatoires et la superquantification en vue d'une Mécanique générale. (Thèse de Doctorat ès-sciences Paris 1933. Annales de Physique 11e s. t. 2. juil. 1934.)

Conditions minima auxquelles doit satisfaire une théorie physique. Bull. Acad. Roy. Sc. Belgique t. XXI (1935) p. 708; t. XXIII (1937) p. 159.

Travaux sur la Notion de stabilité:

Comptes Rendus t. 201 (1935) p. 182.

Bull. Acad. Roy. Sc. Belgique t. XXI (1935) p. 780; t. XXII p. 525.

Communication au Congrès Int. Philo. scientifique Paris 1935.

Travaux sur la Notion d'Espace physique:

Comptes Rendus t. 200 (1935) p. 192, p. 434; t. 204 (1937) p. 219.

Bull. Soc. Roy. Sc. Liège No. 2 (1935) p. 86.

Comm. Congrès Intl. Philo. Paris. 1935.

Thalès t. 2 (1936) p. 136 et t. 3 (1937).

Groupe d'équivalence d'une théorie déductive. Comptes Rendus t. 205 (1937) p. 725.

L'unité de la Physique théorique. Comptes Rendus t. 205 (1937) p. 843.

P. A. M. DIRAC: Quantum Mechanic. (Oxford Press 1936).

DUGAS: *La méthode dans la Mécanique des quanta.* Actualités Scientifiques 283 (1935). Revue gl. des Sciences t. 48 (15 Février 1937) p. 68.

A. S. EDDINGTON: *La Nature du Monde physique.* trad. fse G. CROS. (Payot, Paris 1929).

Paulette FÉVRIER: Comptes Rendus t. 204 (1937) p. 481 et p. 958. Communication au IXe Congrès int. Philo. Paris 1937 fasc. VI p. 88. No. 535 des Actualités scientifiques.

M. FRECHET: *Les Espaces abstraits* (Gauthier-Villars 1928).

Recherches modernes sur la théorie des probabilités. Premier livre: *Généralités sur les probabilités. Variables aléatoires* (t. 1, fasc. 3 du Traité du calcul des probabilités par Emile Borel) (Gauthier Villars Paris 1937).

L'arithmétique de l'infini (Actualités scientifiques No. 144. (1933). (Dans ces trois ouvrages on trouvera une bibliographie détaillée des mémoires originaux sur ces questions).

F. GONSETH: *Les fondements des Mathématiques* (Blanchard Paris 1926).

Les Mathématiques et la Réalité (Alcan Paris 1936).

Qu'est-ce que la logique? Actualités scientifiques No. 524 (1937).

Actes du Congrès int. de Philo. Scient. Paris 1935 fasc. VI, no. 393 des Actualités scientifiques, p. 11.

Comm. IXe Congrès Int. Philo. Paris 1937, fasc. IV p. 64, (no. 533 des Actualités scientifiques).

W. HEISENBERG: *Les principes physiques de la théorie des quanta*. trad. fse. Champion et Hochard (Gauthier-Villars 1932).

J. HERBRAND. *Recherches sur la Théorie de la démonstration*. Thèse de Doctorat ès-sciences. Paris 1930 (Varsovie imprimerie Dzielwski).

A. JARRY: *Les Minutes de Sable mémorial*. (Fasquelle éd. Paris 1932, d'après l'édition originale).

B. de KERÉKJARTÓ: Communication au IXe Congrès int. de Philo. Paris 1937 fasc. VI p. 166 (no. 535 des Actualités scientifiques).

KRASNER: *Une généralisation de la notion de corps*. Journ. de Math. 1938 1er trimestre (sous presse).

G. KUREPA: *Ensembles ordonnés et ramifiés*. Thèse de Doctorat ès-sciences Paris 1935 (Publications mathématiques IV Belgrade 1935).

Edouard LE ROY: *Ce que la Microphysique apporte ou suggère à la philosophie*. Revue de Métaphysique et Morale t. XLII (1935) no. 2. p. 151 et no. 3 p. 319.

Les paradoxes de relativité sur le temps. Revue philosophique. 62e année, Janvier-Avril 1937, p. 10 et p. 195.

J. MARIANI: *Les limites des notions d'objet et d'objectivité*. (Préface de M. Léon Brillouin) no. 519 des Actualités scientifiques (1937).

Sur la signification physique des groupes de transformations. Journ. de Phys. s. VII t. III no. 5 (Mai 1932) p. 219.

Comptes Rendus t. 194 (1932) séance du 22 Février. t. 196 (1933) p. 900.

E. A. MILNE: *Relativity gravitation and world-structure* (Oxford, Clarendon press 1935).

NICOD: Proc. Cambridge phil. Soc. t. 19 (1917).

H. POINCARÉ: *Science et méthode*. (Flammarion 1908)

Science et hypothèse, (Flammarion 1906).

La valeur de la Science, (Flammarion).

Dernières Pensées, (Flammarion 1926).

Abel REY: *La Théorie de la Physique chez les physiciens contemporains* (2e éd. Alcan Paris 1923).

A. REYMOND: *Les principes de la Logique et la critique contemporaine* (Boivin Paris).

SCHREIER et ULAM: Comptes Rendus t. 197 (1933) p. 387.

A. TARSKI: *Sur la Méthode déductive*. Comm. IXe Congrès int. de Philosophie Paris 1937 fasc. VI p. 95 (no. 535 des Actualités scientifiques).

ULAM et SCHREIER: Comptes Rendus t. 197 (1933) p. 387.

I N D E X

A

Appareils de mesure p. 96, 97
Application p. 47, 69.
Atomistique (conception) p. 107.
Axiomatique (méthode) p. 18.
Axiomatiques (énoncés) p. 75, 81, 87.
Axiomes p. 20, 33, 53.

B

G. BACHELARD p. 76, 78.
N. BOHR p. 9.
G. BOULIGAND p. 95, 104.
Louis de BROGLIE p. 10, 12, 13, 85,
88, 89, 106, 111.
Maurice de BROGLIE p. 7.
L. BRUNSCHVIG p. 83.

C

CARNOT p. 6, 79.
Catégorique (système) p. 70.
CHWOLSON p. 110, 111
Complète (théorie) p. 70.
COMPTON p. 7.
Concept p. 74.
Condition sur des éléments p. 33.
Correspondance p. 32.
COULOMB p. 9.
Contradictoire faiblement p. 46.
Contradictoire fortement p. 38.

D

DAVISSON p. 10.
Définition p. 20, 23, 25, 32, 53.
Définition explicite p. 25.
Définition implicite p. 25.

Définition incomplète p. 38.
Définition semi-implicite p. 25.
Démonstration p. 20, 33.
P. A. M. DIRAC p. 11, 106.
DUGAS p. 104.
DUHEM p. 104.

E

EDDINGTON p. 90, 99.
EINSTEIN p. 7, 10.
Elément d'un ensemble p. 32.
Ensemble p. 32, 33.
Entraîne (implication) p. 25, 26, 33, 43,
54.
Equivalence (opération d') p. 45, 57.
Equivalence des axiomes p. 55.
Equivalence des termes primitifs p.
55.
Espace abstrait p. 103.
Espace physique p. 104.
et (conjonction, &) p. 37, 38, 43, 54.
Etat p. 101.
EUCLIDE p. 21, 71, 81, 82; 85.

F

FARADAY p. 110.
FERMAT p. 10.
Paulette FEVRIER p. 31, 38, 98.
FITZGERALD p. 8.
Fonction p. 24, 32.
Fonction propositionnelle p. 33.
M. FRECHET p. 77.
FRESNEL p. 7.

G

GERMER p. 10.
F. GONSETH p. 16, 18, 19, 24, 26, 27,

28, 30, 55, 67, 74, 100.
 Groupe d'équivalence p. 60.
 Groupe d'équivalence des axiomes p. 58.
 Groupe d'équivalence des termes primitifs p. 60.
 Groupe d'équivalence irréductible p. 62.

H

W. HEISENBERG p. 10, 11, 97, 99, 102.
 J. HERBRAND p. 45, 47, 51, 66.
 D. HILBERT p. 71, 78, 79.

I

Identité logique p. 40.
 Indépendance des termes primitifs p. 56.
 Indépendance des axiomes p. 65.
 Idonéiste (conception) p. 27.
 Idonéiste (logique) p. 32.
 Idonéiste (vrai) p. 35.

J

JACOBI p. 10.
 A. JARRY p. 76.

K

B. de KERÉKJÁRTÓ p. 67.
 KRASNER p. 103.
 G. KUREPA p. 46.

L

E. LE ROY p. 17, 75, 90, 92.
 LIOUVILLE p. 101.
 LOBATCHEWSKY p. 71, 82.
 Logique p. 22, 30.
 Logique L_1 p. 39.
 Logique idonéiste p. 32.
 LORENTZ p. 8, 106.

M

J. MARIANI p. 12, 93, 94, 95, 102, 106.

MAUPERTUIS p. 10.
 Mesures virtuelles (types de) p. 96.
 Métalogique p. 30.
 MICHELSON p. 7.
 MILLIKAN p. 7.
 MILNE p. 12.
 MINKOWSKI p. 8.

N

Négation p. 36.
 NEWTON p. 10.
 NICOD p. 48.
 non-catégorique (système) p. 70.
 non-contradiction faible p. 46.
 non-contradictoire fortement p. 38, 47.

O

Objet (notion d') p. 11.
 Observateur p. 93.
 Opération binaire p. 37.
 Opération logique p. 37.
 Opération logique de première espèce p. 37.
 Opération logique de seconde espèce p. 50.

P

PAINLEVE p. 83.
 G. PETIAU p. 106.
 Physico-logique p. 114.
 Physique abstraite p. 112.
 Physique collective p. 105.
 Physique du solitaire p. 104.
 Physique mathématique p. 110.
 Physique structurale p. 95, 103.
 Physique théorique p. 109.
 PLANCK p. 7.
 H. POINCARÉ p. 91, 111.
 Postulat p. 20.
 Prévisions p. 99.
 Prévisions certaines p. 100.
 Principe des signaux p. 94, 105.
 Propositions p. 23, 33, 53.
 Propositions non-vraies p. 34.
 Propositions primitives p. 20, 23.
 Propositions vraies p. 33, 53.

Q

Quanta p. 7.

R

RANKINE p. 109.
 Rationnel p. 79.
 rationnelle (connaissance) p. 16.
 Réalité p. 92.
 Règles de définition p. 23.
 Règles du raisonnement p. 23.
 Relation binaire p. 37.
 Relation réflexive, symétrique, transitive, de classification, p. 46.
 Abel REY p. 5, 109.
 A. REYMOND p. 82.
 RIEMANN p. 82.
 RUTHERFORD p. 9.

S

SCHRÖDINGER p. 10.
 SOMMERFELD p. 9.
 Stabilité p. 104.
 Structure p. 103.
 Synthèse inductive p. 86.
 Système d'axiomes consistant p. 67.
 Système d'axiomes non-contradictoire p. 66.

T

TARSKI p. 21, 22, 55, 67.
 Termes définis p. 20, 23, 25, 32.
 Termes primitifs p. 20, 23, 32, 53, 55, 73.
 Théorème p. 20, 23.
 Théorie déductive p. 20, 24, 32, 53.
 Théorie déductive classique p. 54.
 Théorie déductive formalisée p. 23, 53.
 Théorie déductive normale p. 53.
 Théorie déductive partielle p. 21.
 Théorie irréductible p. 62.
 Théorie mathématique p. 30, 54.
 Théorie réductible p. 62.
 Théories deductives isomorphes en équivalence p. 60.
 J. J. THOMSON p. 7.
 Type p. 32.

V

Valence d'une logique p. 36.
 Valeur logique p. 35.
 Valeur logique faux p. 36.
 Valeur logique non-vrai p. 35.
 Valeur logique tiers p. 39.
 Valeur logique vrai p. 35.
 Variable p. 32.

W

H. A. WILSON p. 7, 9.

TABLE DES MATIÈRES

	<i>Pag.</i>
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I. PHYSIQUE NOUVELLE ET PHYSIQUE CLASSIQUE . .	5
1. Existence d'une physique nouvelle	5
2. L'effondrement de la conception classique	6
3. Naissance de la théorie de la Relativité	7
4. Naissance de la mécanique atomique	9
5. Altération de la notion d'objet	11
6. Ecrroulement de la physique classique	12
7. La physique nouvelle	13
CHAPITRE II. THEORIE PHYSIQUE ET THEORIE DEDUCTIVE . .	15
1. Faillite des conceptions classiques	15
2. Les notions de base	17
3. La forme théorique:	19
4. Termes primitifs et propositions primitives	20
5. Théorie déductive	21
6. Théorie déductive formalisée	23
7. Schématisation et théorie déductive	24
8. Théorie physique et théorie déductive	27
CHAPITRE III. LOGIQUES ET THEORIES DEDUCTIVES	30
1. Les règles d'une théorie déductive	30
2. Notions fondamentales	32
3. Les notions de vrai et de faux	34
4. La conjonction „et“	37
5. La Logique L_1	39
6. Règles fondamentales de raisonnement dans L_1	42
7. Principales formules du calcul des propositions de L_1	44
8. Non-contradiction du calcul des propositions dans L_1	46
9. Réduction du nombre d'opérations fondamentales	47
10. Le calcul des propositions et l'algèbre	49
11. Opérations de seconde espèce	50
CHAPITRE IV. CONDITIONS IMPOSEES A UNE THEORIE DEDUCTIVE. EQUIVALENCE	53
1. Théorie déductive formalisée	53
2. Conditions sur les termes primitifs	55

3. Equivalence. Groupe d'équivalence	56
4. Théories déductives isomorphes en équivalence	60
5. Conditions sur les axiomes	65
6. Conditions nécessaires à une théorie déductive	71
CHAPITRE V. LA SYNTHÈSE INDUCTIVE	73
1. La méthode déductive et la physique	73
2. Termes primitifs et concepts	73
3. Difficultés de dégager des idées simples	76
4. Nécessité d'une étude préliminaire aux énoncés axiomatiques	78
5. Les trois parties d'une théorie physique	80
6. Rôle des théories déductives partielles	81
7. L'aide de la méthode historico-critique	82
8. Les raisonnements d'analogie	84
9. L'introduction des notions nouvelles	85
10. La synthèse inductive	86
11. Conditions sur les énoncés axiomatiques	87
12. Esthétique et théorie physique	88
CHAPITRE VI. ÉTUDE DE QUELQUES CARACTÈRES FONDAMENTAUX DES THÉORIES PHYSIQUES	92
1. La Réalité physique	92
2. Le rôle théorique des observateurs	93
3. La méthode d'adjonction	95
4. Influence des appareils de mesure sur la forme d'une théorie physique	96
5. Mesures simultanées	97
6. Prévisions et incertitudes	99
7. Inadéquation de la notion d'état	101
8. La Physique structurale	103
9. Principes de la Physique structurale	103
10. Les résultats de la Physique structurale	106
11. Opposition avec la conception atomistique	107
12. Classification des propositions d'une théorie physique	108
13. Physique théorique et Physique mathématique	109
CONCLUSION	115
Table des symboles	121
Bibliographie	124
Index	127
TABLE DES MATIÈRES	130

